Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

IMPORTANTE: Las soluciones que se dan aquí son a título orientativo. En los problemas en los que la solución se puede obtener de distintas formas, se han considerado todas ellas como correctas durante la corrección.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de $A^\top$, es decir, la matriz traspuesta de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Solución:

a) El determinante de A y su traspuesta son el mismo, por lo tanto, basta con calcular el determinante de A: $|A| = 1$.

Criterios de corrección:

- Justificación del método empleado: 0,25 puntos.
- Cálculo del determinante: 0,5 puntos.
- Resultado final correcto: 0,25 puntos.

b) Operando y despejando: $X \cdot A + 3 \cdot A = B \Longrightarrow X = (B - 3A)A^{-1}$. Teniendo en cuenta que $AA^{-1} = I$, tenemos que $X = B \cdot A^{-1} - 3I$.

Para calcular A^{-1}: $adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{1} adj(A)^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. El valor de X es $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Criterios de corrección:

- Despejar X en la ecuación matricial: $0,5$ puntos.
- Cálculo de A^{-1}: 0,5 puntos.
- Obtención de $(B - 3A)A^{-1}$: 0,25 puntos
- Resultado final correcto: $0,25$ puntos.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x & +y & +z & = & a+1 \\ a \cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{array} \right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Solución:

a)
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\ ;\ AM=\begin{pmatrix}1&1&1&a+1\\a&0&1&a-1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}$$

Como $|A|=-a+1$, se anula solamente para $a=1$. En este caso, tenemos que $rango(A)=2$ y $rango(AM)=3$. Entonces, el sistema es incompatible. Cuando $a\neq 1$ tenemos un sistema compatible determinado.

Criterios de corrección:

- Obtención del determinante de A y los valores de a donde se anula: 0,5 puntos.
- Discusión razonada del caso en que a es distinto de los valores en los que se anula el determinante de A: 0,25 puntos
- Cálculo del rango de A y de AM cuando $a=1$: 0,75 puntos. Discusión razonada en ese caso: 0,25 puntos.

b) Para $a=0$ el sistema es compatible determinado:
$$AM=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}F_1=F_1-F_2\\ \\ F_3=F_3-F_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&0&1&-1\\1&-1&0&4\end{pmatrix}\begin{matrix}F_1=F_1+F_3\\ \\ F_3=F_3-F_1\end{matrix}\sim$$
$$\begin{pmatrix}2&0&0&6\\0&0&1&-1\\0&-2&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}F_1=F_1/2\\ \\ F_3=F_3/(-2)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&0&1&-1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

Solución: $\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=-1\end{cases}$

Criterios de corrección:

Proceso de resolución del problema: 0,75.

3. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{2}{3+e^x}dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x=t$.)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

Solución:

a) Hacemos el cambio $e^x=t\longrightarrow e^xdx=dt\longrightarrow dx=\frac{dt}{t}$:
$$\int\frac{2}{3+e^x}dx=\int\frac{2}{3+t}\frac{dt}{t}=\int(\frac{-2/3}{3+t}+\frac{2/3}{t})dt=-\frac{2}{3}ln|3+t|+\frac{2}{3}ln|t|+C=$$
$-\frac{2}{3}ln(3+e^x)+\frac{2}{3}ln(e^x)+C=-\frac{2}{3}ln(3+e^x)+\frac{2}{3}x+C.$

Criterios de corrección:

- Plantear y realizar correctamente el cambio de variable: 0,5 puntos.
- Resolución de la integral: 0,5 puntos.
- Realizar todos los cálculos correctamente y dar la solución correcta: 0,25 puntos.

b) $\displaystyle\int\frac{-x+1}{x^2+3}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+3}dx=\frac{-1}{2}ln(x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(x/\sqrt{3})+C.$

Criterios de corrección:

- Resolución justificada de la integral: 1 punto.
- Obtención del resultado final: 0,25 puntos.

4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución:

a) La distancia del punto P a la recta r viene dada por $d(P,r) = |\vec{AP} \times \vec{v}|/|\vec{v}|$, con A un punto de la recta y $\vec{v}$ el vector director de la recta. Tomamos $A = (0,1,0)$ y $\vec{v} = (1,1,-1)$. Por tanto, $\vec{AP} = (1,-1,1)$. $|\vec{AP} \times \vec{v}| = |(0,2,2)| = \sqrt{8}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. Por tanto, $d(P,r) = \sqrt{8}/\sqrt{3}$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Planteamiento del problema: 0,25 puntos.
- Producto vectorial: 0,50 puntos.
- Obtención de las normas de los vectores: 0,25 puntos
- Cálculo del valor correcto de la distancia: 0,25 puntos

b) Para que las dos rectas sean paralelas sus vectores directores tienen que ser linealmente dependientes. El vector director de la recta s es $\vec{u} = (2,-2a,2)$ y el de la recta t es $\vec{v} = (a,-1,1)$. Para que sean linealmente dependientes se tiene que cumplir que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 2a-2, -2+2a) = \vec{0} \longleftrightarrow a = 1$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Planteamiento del problema: 0,50 puntos.
- Producto vectorial: 0,50 puntos.
- Cálculo del valor correcto de a: 0,25 puntos

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Solución:

a) Si tomamos el punto A como uno de los vértices del tetraedro, podemos calcular los tres vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ tales que el volumen es $\frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$. En concreto, $\vec{AB} = (2,1,-1)$, $\vec{AC} = (1,1,0)$ y $\vec{AD} = (1,1,1)$. Por tanto, el volumen es $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(2-1+1-1) = \frac{1}{6}$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Planteamiento del problema: 0,50 puntos.
- Cálculo del producto de vectores: 0,50 puntos.
- Cálculo del valor correcto del volumen: 0,25 puntos

b) Si tomamos los puntos A, B y C podemos coger los vectores generadores $\vec{AB} = (2,1,-1)$ y $\vec{AC} = (1,1,0)$. Cogemos el punto A y estos dos vectores para plantear las ecuaciones del plano: $\begin{cases} x &= 0 + 2\lambda + 1\gamma \\ y &= 0 + 1\lambda + 1\gamma \\ z &= 1 + (-1)\lambda + 0\gamma \end{cases}$, o, equivalentemente, $x - y + z = 1$. La recta perpendicular al plano π tiene como vector director $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (1,-1,1)$. La ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por D es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Cálculo del plano: 0,50 puntos

- Cálculo de la recta perpendicular: 0,75 puntos

6. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Solución:

a) Las dos condiciones que se imponen implican:

- $f(1) = 2 \longrightarrow a - 2 - 1 + b = 2;\ a + b = 5.$
- Como $f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$, tenemos que $f'(1) = 3a - 4 - 1 = 1 \longrightarrow 3a - 5 = 1;\ a = 6/3 = 2.$

Por tanto, $a = 2$ y $b = 5 - 2 = 3$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema: 0,25 puntos.
- Obtener la primera ecuación: 0,25 puntos.
- Obtener la segunda ecuación: 0,25 puntos.
- Dar los valores correctos de a y b: 0,25 puntos.

b) Para que sea continua, entonces los límites laterales en $x = 0$ deben existir y ser iguales: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = b$. Entonces, para que $f(x)$ sea continua $b = 1$.

La derivada de la función en otros puntos distintos de $x = 0$ es $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ be^x & x > 0 \end{cases}$.

Si imponemos que la derivadas laterales coincidan: $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -a;\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = b$. Por tanto, $b = -a$ y $a = -b = -1$ y habría que definir $f'(0) = 1$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema: 0,25 puntos.
- Condición sobre la continuidad: 0,50 puntos.
- Condición sobre la derivada: 0,50 puntos.
- Dar los valores correctos de a y b: 0,25 puntos.

7. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} & x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} & 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} & x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Solución:

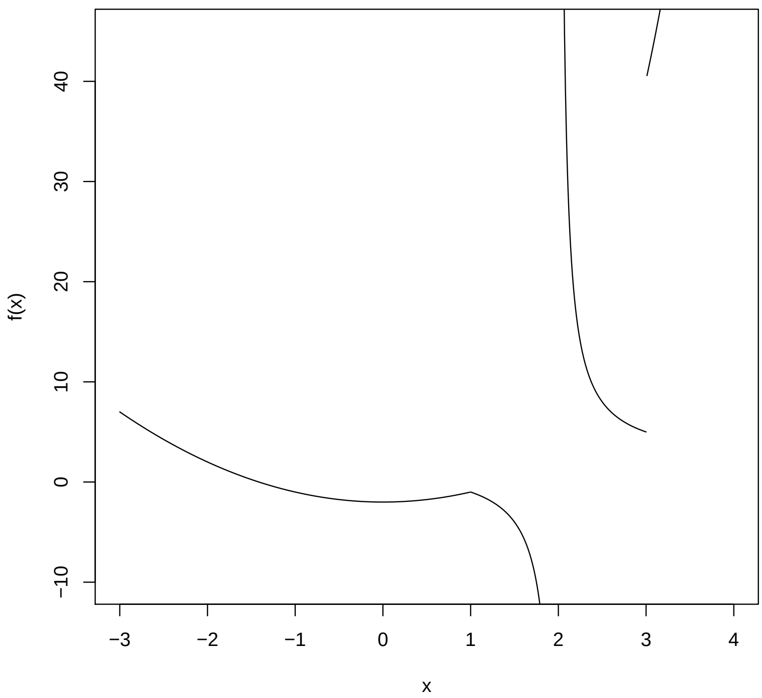
a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \dfrac{0}{0}$, indeterminado. Aplicamos la regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}}{2} = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Criterios de corrección:

- Detectar indeterminación: 0,25 puntos.
- Plantear y ejecutar estrategia de resolución: 0,5 puntos.

- Resultado final correcto: 0,25 puntos.

b) La función está definida a trozos y solamente no está definida en $x = 2$. Por tanto, el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$. La gráfica de la función es:



La función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = 2$ y posiblemente en $x = 1$ y $x = 3$, por cambiar la expresión de $f(x)$ alrededor de estos puntos.

- $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - 2 = -1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = (2-1)/(1-2) = -1$. Por tanto, la función es continua.
- $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = (4-1)/0^- = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = (4-1)/0^+ = +\infty$. Por tanto, la función tiene una discontinuidad de salto infinito.
- $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = (6-1)/(3-2) = 5$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2e^3$. Por tanto, la función no es continua y la discontinuidad es de salto finito.

Criterios de corrección:

- Dominio: 0,25 puntos.
- Discusión de continuidad en $x = 1$: 0,50 puntos.
- Discusión de continuidad en $x = 2$: 0,25 puntos.
- Discusión de continuidad en $x = 3$: 0,50 puntos.

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

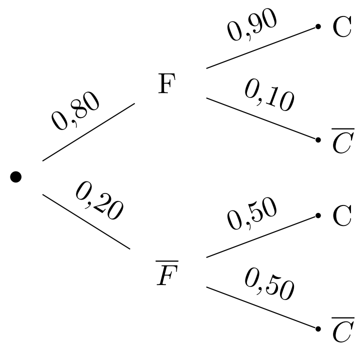
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Solución:

a) La probabilidad de que un usuario comparta fotografías es $P(F) = 0{,}80$ y la de que no lo haga es $P(\overline{F}) = 0{,}20$. Además, la probabilidad de que comenten fotografías si no las comparten es $P(C \mid \overline{F}) = 0{,}50$, mientras que entre los que comparten fotografías esa probabilidad es $P(C \mid F) = 0{,}90$.



a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un usuario haya comentado alguna vez una fotografía aplicando el teorema de la probabilidad total es: $P(C) = 0{,}80 \cdot 0{,}90 + 0{,}20 \cdot 0{,}50 = 0{,}72 + 0{,}10 = 0{,}82$.
<u>**Criterios de corrección:**</u> *Explicación y planteamiento:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

a.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que un usuario comparta fotos si nunca las ha comentado se puede calcular por el teorema de Bayes:
$P(F \mid \overline{C}) = \frac{P(F\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0{,}10\cdot 0{,}80}{1-P(C)} = \frac{0{,}08}{1-0{,}82} = 0{,}44$.
<u>**Criterios de corrección:**</u> *Explicación y planteamiento:* 0,25 *puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

b) Sea X la variable aleatoria que mide cuántas caras se han identificado de esas 4. X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 0{,}80$.

b.1) La probabilidad de que exactamente 4 personas sean identificadas correctamente es $P(X = 4) = \binom{4}{4} 0{,}80^4 \cdot 0{,}20^0 = 0{,}4096$.
<u>**Criterios de corrección:**</u> *Definición de la variable, planteamiento del problema:* 0,25 *puntos. Resolución:* 0,25 *puntos.*

b.2) La probabilidad de que al menos una persona sea identificada correctamente es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.
<u>**Criterios de corrección:**</u> *Planteamiento del problema: 0,25 puntos. Justificación del cálculo de la probabilidad: 0,25 puntos. Obtención de la probabilidad final: 0,25 puntos.*