

Propuesta A

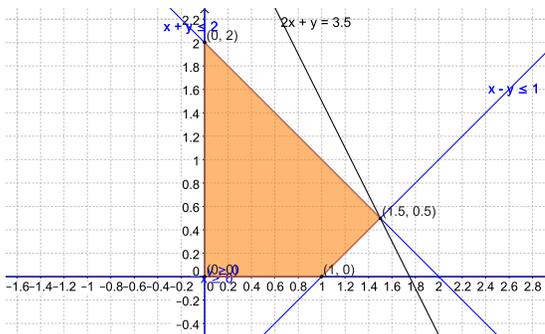
1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Maximiza la función $z = 2x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x - y &\leq 1 \\ x + y &\leq 2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Dibuja la región factible. (1 punto)
- Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)
- Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

Solución:



- 1 punto.
- Vértices (0,0),(0,2)(1.5,0.5)(1,0). 0.25 puntos
- Solución óptima (1.5,0.5) Valor 3.5. 0.25 puntos

2. Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas.

- Plantea el sistema de ecuaciones que permita obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron. (1.5 puntos)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución:

$x =$ nº de camisetas vendidas
 $y =$ nº de bufandas vendidas
 $z =$ nº de gorras vendidas

$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 2980 \\ x + y + z = 380 \\ x = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + 5y + 7z = 2980 \\ x + y + z = 380 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

- Por cada ecuación bien planteada .0.5 puntos
- Tener bien resuelto el sistema 0.5 puntos

Solución: $x=180$ camisetas, $y=110$ bufandas, $z=90$ gorras

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |-x-1| - t & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 2$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

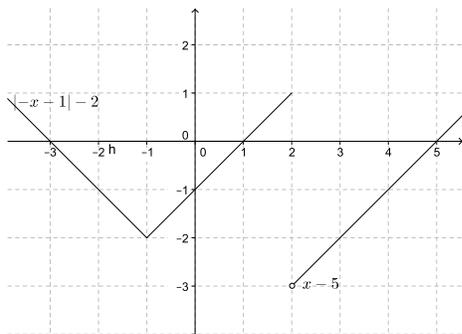
Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 puntos)

Cálculo correcto del valor, $t=6$ (0.25 puntos)

b)



0.5 ptos por cada trozo bien dibujado

4. Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(2, 1)$. (1.5 puntos)

Solución:

$$f(x=2) = 1 \Rightarrow 4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = -3 \text{ (0.5 puntos)}$$

$$f'(x) = 2x + a \text{ (0.25 puntos)}$$

$$f'(x=2) = 0 \text{ por tener } f \text{ un mínimo en el punto de abscisa } x = 2 \text{ (0.25 puntos)}$$

$$\Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4 \text{ (0.25 puntos)}$$

$$2a + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2a = -3 + 8 = 5 \text{ (0.25 puntos)}$$

5. En una empresa se producen dos tipos de piezas: A y B . El 20% son piezas del tipo A y el 80% piezas del tipo B . La probabilidad de que una pieza de tipo A sea defectuosa es 0.02 y de que una pieza de tipo B sea defectuosa es 0.1.

a) Elegida una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? (0.75 puntos)

b) Se escoge al azar una pieza y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A ? (0.75 puntos)

Solución:

$$a) A = \text{Tipo } A; B = \text{Tipo } B; D = \text{defecto}; ND = \text{No defecto } P(A) = 1/5; P(B) = 4/5$$

$$P(D/A) = 0.02; P(D/B) = 0.1$$

Plantear probabilidades (0.25 ptos)

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = 0.084. \text{ (0.5 puntos)}$$

$$b) P(A/ND) = P(A \cap ND) / P(ND) = (P(ND/A) \cdot P(A)) / (1 - P(D)) = (0.98 \cdot 0.2) / (1 - 0.084) = 0.2139738. \text{ (0.75 puntos)}$$

6. Se considera una muestra aleatoria de 10 consumidores mayores de edad, que en las rebajas de invierno gastaron: 65, 72, 74, 75, 80, 81, 82, 84, 87 y 90 euros respectivamente.

a) Sabiendo que el gasto por persona, en las rebajas de invierno, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ euros, halla un intervalo de confianza para el gasto medio poblacional con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{65+72+74+75+80+81+82+84+87+90}{10} = 79 \text{ euros} \quad (0.25 \text{ puntos})$$

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 20$ euros

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \quad (0.25 \text{ puntos})$$

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (0.25 \text{ puntos})$$

$$IC = \left(79 - 1,96 \frac{20}{\sqrt{10}}, \quad 79 + 1,96 \frac{20}{\sqrt{10}} \right) = (66.604, 91.396) \quad (0.5 \text{ puntos})$$

b) Aumentando el tamaño de la muestra. (0.75 puntos)

Propuesta B

1. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M = (3 \cdot I + A^2)$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 pts)

b) Calcula la matriz X tal que $X \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 pts)

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 5 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^2 (0.5 puntos)

$$M = (3 \cdot I + A^2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplicación y suma (0.25 puntos)

b)

0.5 puntos procedimiento y 0.25 puntos por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix}$$

2. Una empresa produce tres tipos de bicicletas: de montaña, de paseo y estáticas. Para su fabricación cada bicicleta necesita piezas de acero, aluminio y fibra de carbono en las cantidades que se indican en la tabla siguiente:

	Bicicleta de montaña	Bicicleta de paseo	Bicicleta estática
Piezas de acero	2	3	1
Piezas de aluminio	6	4	6
Piezas de fibra de carbono	8	6	6

Si se dispone de 9 piezas de acero, 28 piezas de aluminio y 34 piezas de fibra de carbono:

a) Plantea el sistema que nos permita obtener el número de bicicletas de cada tipo que se podrán fabricar utilizando todas las piezas. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución:

a)

$x = n^{\circ}$ de bicicletas de montaña fabricadas

$y = n^{\circ}$ de bicicletas de paseo fabricadas

$z = n^{\circ}$ de bicicletas estáticas fabricadas

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ 6x + 4y + 6z = 28 \\ 8x + 6y + 6z = 34 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ 3x + 7y = 13 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ 3x + 7y = 13 \\ y = 1 \end{cases}$$

Por cada ecuación bien planteada.0.5 puntos

b)

Por tener bien resuelto el sistema.0.5 puntos

Soluciones: $x=2$, $y=1$, $z=2$

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x-t| & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 2$? (0.5 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(2, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(2, +\infty)$. (0.5 ptos)

Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 puntos)

Cálculo correcto del valor, $t=2$ (0.25 puntos)

b)

Saber condiciones de extremo (0.25 puntos)

Tiene un mínimo en $(3,-1)$ (0.25 puntos)

c)

En $(2,3)$ es decreciente y en $(3,+\infty)$ es creciente

(0.5 puntos)

4. En un tramo de una montaña rusa, la altura alcanzada por el vagón, medida en metros, se ajusta a la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 38$, siendo t el tiempo medido en segundos, $0 \leq t \leq 6$.

a) ¿En qué instante t , el vagón alcanza la altura máxima en ese tramo, y cuál es dicha altura? (1 punto)

b) ¿En qué instante t , el vagón alcanza la altura mínima en el tramo mencionado, y cuánto vale dicha altura? (0.5 puntos)

Solución: a)

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 38$$

$$f'(t) = 3t^2 - 18t + 15 \text{ (0.25 puntos)}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ y } t = 5 \text{ (0.25 puntos)}$$

$$f''(t) = 6t - 18$$

$$f''(t = 1) = 6 - 18 = -12 < 0 \text{ corresponde a un máximo relativo (0.25 puntos)} \rightarrow (t = 1, f(1) = 45)$$

En el instante $t=1$ el vagón alcanza su altura máxima y es de 45m (0.25 puntos)

$$b) f''(t = 5) = 6 \cdot 5 - 18 = 12 > 0 \text{ corresponde a un mínimo relativo (0.25 puntos)} \rightarrow (t = 5, f(5) = 13)$$

En el instante $t=5$ el vagón alcanza su altura mínima en ese tramo considerado y es 13m. (0.25 puntos)

5. En un colegio el 30 % de los alumnos juegan al baloncesto, el 40 % juegan al fútbol, y el 50 % juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto? (0.75 puntos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol? (0.75 puntos)

Solución:

a) F= jugar al fútbol; B= jugar al baloncesto; $P(B)=0.30$; $P(F)=0.40$; $P(B \cup F)=0.5$

Plantear probabilidades (0.25 ptos)

$$P(B \cap F)=P(B)+P(F)-P(B \cup F)=0.3+0.4-0.5=0.2. \text{ (0.5 ptos)}$$

b)

$$P(F/B)=P(F \cap B)/P(B)=0.2/0.3=2/3 \text{ (0.75 ptos)}$$

6. Una fábrica produce cables de acero, cuya resiliencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10 \text{ KJ/m}^3$. Se tomó una muestra aleatoria de 100 piezas y mediante un estudio estadístico se obtuvo un intervalo de confianza (898.04 , 901.96) para la resiliencia media de los cables de acero producidos en la fábrica.

a) Calcula el valor de la resiliencia media de las 100 piezas de la muestra. (0.75 puntos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (1.25 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) El intervalo de confianza es simétrico respecto de la media muestral. Por tanto la media muestral es:
 $\bar{x} = \frac{898.04+901.96}{2} = 900 \text{ KJ/m}^3$ (0.75 puntos)

b)

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(900 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{10}{\sqrt{100}}, 900 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{10}{\sqrt{100}} \right) = (900 - z_{\frac{\alpha}{2}}, 900 + z_{\frac{\alpha}{2}}) = (898,04, 901,96)$$

$900 - z_{\frac{\alpha}{2}} = 898,04 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \Rightarrow$ El nivel de confianza es del 95 %

Escribir la fórmula del intervalo de confianza.0.25 puntos

Escribir la fórmula del intervalo de confianza con los datos del problema.0.25 puntos

Igualar el intervalo obtenido anteriormente y el dado. 0.25 puntos

Obtener $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. 0.25 puntos

Obtener que el nivel de confianza es del 95 %.0.25 puntos