Aplicación del principio de necesidad al álgebra

Henar Herrero

Principio de necesidad

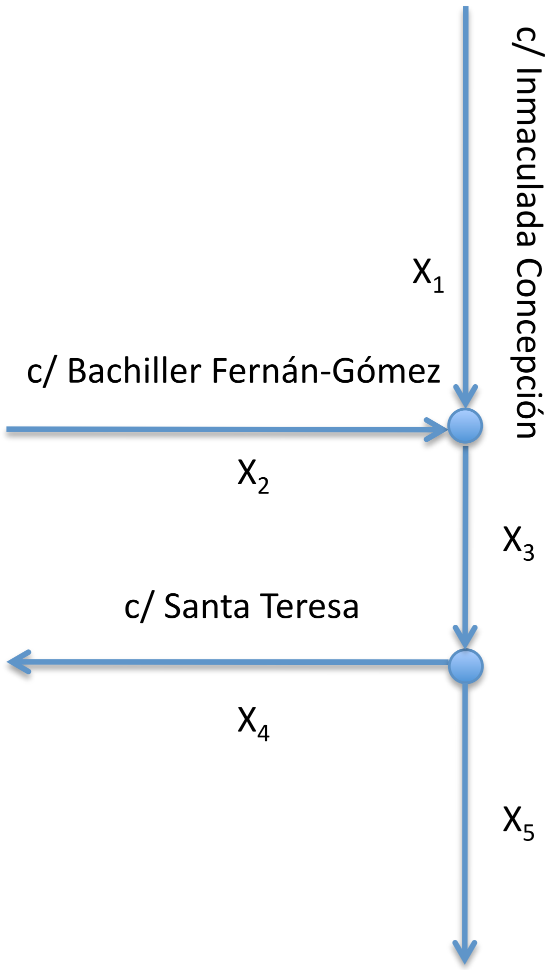
Para que los estudiantes aprendan tienen que ver una necesidad intelectual, no social ni económica, de por qué se les enseña eso.

De no hacerlo así a los estudiantes se les hace tan difícil entenderlo que es casi imposible.

Lo planteo para introducir los conceptos de espacios vectoriales.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J-L. Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Springer, Dordrecht.

Problema flujo de tráfico



Sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$x_3 - x_4 - x_5 = 0,$$

Sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Problema flujo de tráfico

Solución dependiente de tres parámetros

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \beta - \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\alpha = 10$, $\beta = 20$ y $\gamma = 5$, una solución particular es $\vec{v} = (10, 10, 20, 5, 15)$

Problema flujo de tráfico

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta + \gamma \\ \alpha \\ \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ números reales.

Problema flujo de tráfico

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \\ \gamma \\ \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ números reales.

Preguntas

- Hemos escrito la solución de 3 formas distintas, como combinación lineal de 3 vectores
- ¿Son la misma solución? ¿por qué?
- ¿Qué relación hay entre las tres ternas de vectores?

Respuestas

- A partir de aquí, explico los conceptos de espacio vectorial, subespacio vectorial, espacio generado por unos vectores, vectores linealmente independientes, base de un espacio vectorial, ecuaciones paramétricas y cartesianas de un subespacio vectorial, que dan respuesta a estas preguntas

- Cualesquiera 3 vectores que cumplan las ecuaciones y sean linealmente independientes generan el mismo subespacio vectorial

Si partimos de la definición de espacio vectorial

3.1. Concepto de espacio vectorial

Definición: Sea K el conjunto de los números reales R o de los números complejos C y V un conjunto no vacío. Se definen dos operaciones:

1. Suma o adición (ley interna)

$$V \times V \to V$$
$$\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{v} \to \mathbf{u}+\mathbf{v}$$

2. Producto por un elemento de K (ley externa)

$$K \times V \to V$$
$$\alpha\ ,\ \mathbf{v} \to \alpha\, \mathbf{v}$$

V recibe el nombre de espacio vectorial sobre K si se satisfacen las siguientes propiedades: (a los elementos de V se les llama vectores y a los de K escalares)

Espacio vectorial

1. (V,+) es grupo conmutativo
   1. Asociativa: ($\mathbf{u}$ + $\mathbf{v}$) + $\mathbf{w}$ = $\mathbf{u}$ + ($\mathbf{v}$ + $\mathbf{w}$)
   2. Existencia de elemento neutro **0** tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in V$
   3. Existencia de elemento opuesto o inverso: para todo $\mathbf{u} \in V$ existe $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
   4. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. Distributiva suma de vectores por un escalar: para todo escalar $\alpha \in K$ y todo par de vectores **u** y **v** $\in V$, $\alpha\, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\, \mathbf{u} + \alpha\, \mathbf{v}$.
3. Distributiva suma de escalares por un vector: para todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$, y todo vector $\mathbf{u} \in V$, $(\alpha + \beta)\, \mathbf{u} = \alpha\, \mathbf{u} + \beta\, \mathbf{u}$.
4. Distributiva producto de escalares por un vector: para todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$, y todo vector $\mathbf{u} \in V$, $(\alpha \cdot \beta)\, \mathbf{u} = \alpha\, (\beta\, \mathbf{u})$.
5. Propiedad del escalar unidad: el escalar unidad $1 \in K$ cumple $1\, \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(V,+,·K) es un conjunto con unos elementos y dos operaciones que cumplen unas propiedades

Si partimos de la definición de espacio vectorial

- Los estudiantes no entienden nada
- Ni les interesa
- Además de que el profesor se aburre explicándolo