Escuela Técnica Superior de Ingenieros de
Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Castilla-La Mancha, Campus de Ciudad Real

Curso Cero-Matemáticas

3. Funciones Exponencial y Logaritmo

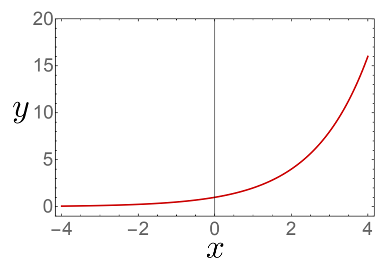
3.1 Introducción

En la vida real nos encontramos con magnitudes que están relacionadas entre sí, de manera que una de ellas depende de otra (u otras). Por ejemplo, la distancia recorrida por un automóvil depende del tiempo que lleva circulando. Aunque se verá más adelante, avanzamos aquí un poco más el concepto función. Una función es una correspondencia entre dos magnitudes, que en general suelen ser numéricas aunque no siempre. Ahora bien, cuando nos referimos a funciones, la correspondencia siempre hay que entenderla en una *dirección determinada*. Es decir, una variable, conocida por **variable dependiente**, que podemos representar por la letra f, viene determinada por otra variable, la llamada **variable independiente** (o variables independientes en el caso más general), que representaremos por la letra x. Así, denotamos que f es función de x, mediante la expresión $f = f(x)$. Por ejemplo, cuando decíamos que la distancia recorrida por un automóvil es función del tiempo, la distancia sería la variable dependiente, mientras que el tiempo sería la variable independiente.

Aunque todo lo anteriormente descrito permite tener una idea intuitiva del concepto de función, hay que advertir que no se considera función a cualquier correspondencia. Para ello es conveniente hablar de conjuntos. Sean A y B dos conjuntos (no necesariamente diferentes). Una función de A a B es un conjunto de *pares ordenados* formados por elementos de A y de B, que guardan entre sí la siguiente propiedad. Sean los elementos $a \in A$, $b \in B$ y $b' \in B$. Si los pares ordenados (a,b) y (a,b') son elementos de una función, entonces debe cumplirse necesariamente que $b' = b$. Al conjunto de todos los elementos de A que pueden figurar como primer miembro del par ordenado de los elementos de la función se le llama **dominio** de la función. Al conjunto de todos los elementos de B que pueden figurar como segundo miembro del par ordenado de los elementos de la función se le llama **imagen** de la función. Esta definición de función puede parecer algo más abstracta que lo visto hasta ahora, sin embargo es importante ir familiarizándose con esta noción más precisa. En los capítulos anteriores tratamos con ejemplos concretos de funciones; los polinomios, los cocientes de polinomios (llamadas funciones racionales), las funciones radicales (raíces cuadradas, etc) y el valor absoluto. En este capítulo vamos a manejar expresiones matemáticas que involucran dos funciones muy importantes que aparecen en multitud de situaciones prácticas: la **función exponencial** y la **función logaritmo**.

- **Función exponencial generalizada:** La función exponencial de un número real x, que puede ser positivo, negativo o nulo, en una base dada $b > 0$ y tal que $b \neq 1$, es igual a la expresión b^x. Es decir, $f(x) = b^x$. Obsérvese la diferencia que hay entre la función exponencial generalizada $f(x) = b^x$ y la función potencia $f(x) = x^b$, siendo en ambos casos $b > 0$. En una función exponencial, la variable independiente x es el *exponente* (de ahí el nombre), mientras que en una función potencia, la variable independiente x es la que aparece elevada a la potencia b.

Ejemplo: Consideremos la función exponencial dada por $y(x) = 2^x$, donde la base es $b = 2$. Si representamos esta función para valores de la variable independiente x comprendidos entre -4 y 4, obtendremos la figura que se muestra a la derecha. Podemos observar que la gráfica es continua, crece de manera monótona y es siempre no negativa. En el origen, $x = 0$, la función es igual $y(0) = 2^0 = 1$. Para valores de x positivos, $y(x) = 2^x$ es mayor que 1, mientras que para valores de x negativos, $y(x) = 2^x$ es menor que 1. Cuando x sea grande, $y(x) = 2^x$ será mucho mayor que x. Por otro lado, cuando x sea negativa y su valor absoluto $|x|$ sea grande, entonces $y(x) = 2^x$ estará cada vez más cercana a cero.



Propiedades de las funciones exponenciales generalizadas en base $b > 0$:

- La función exponencial $b^x > 0$ para todo $-\infty < x < \infty$.
- Si $x > 0$ entonces $b^x > 1$. Si $x < 0$ entonces $b^x < 1$.
- $b^0 = 1$, la función exponencial de cero es siempre uno.
- Si $b > 1$ entonces b^x es creciente. Si $b < 1$ entonces b^x es decreciente.
- Producto de funciones exponenciales: $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Cociente de funciones exponenciales: $b^x / b^y = b^{x-y}$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Inverso de la función exponencial: $b^{-x} = 1/b^x$, para $x \in \mathbb{R}$.
- Exponencial de la función exponencial: $(b^x)^y = b^{xy}$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt[n]{b^m} = b^{m/n}$, donde m y n son enteros positivos.

Ecuaciones exponenciales: Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el exponente. Para resolver una ecuación exponencial suele ser muy útil tener en cuenta que si $b^{x_1} = b^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$. También suele ser muy aconsejable realizar cambios de variable.

Ejemplo: Resolver la ecuación $5^{x-1} + 5 \cdot 5^{2-x} = 26$.

Comprobamos que la incógnita x aparece en el exponente. Es conveniente en este caso realizar un cambio de variable. Si definimos la nueva variable $t = 5^{x-1}$, se tiene que

$$5^{x-1} + 5 \cdot 5^{2-x} = 26 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{x-1} + 25 \cdot 5^{1-x} = 26 \quad \Leftrightarrow \quad t + \frac{25}{t} = 26.$$

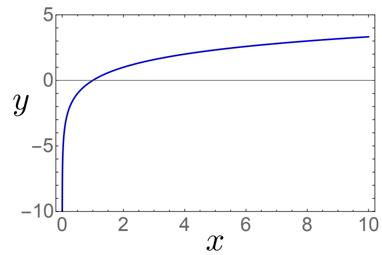
Esta última expresión nos conduce a la ecuación cuadrática $t^2 - 26t + 25 = 0$. Las dos raíces de dicha ecuación son $t_1 = 25$ y $t_2 = 1$. Deshaciendo el cambio $t = 5^{x-1}$, se encuentra que las soluciones de la ecuación exponencial de partida se obtienen de $5^{x_1-1} = t_1 = 25 = 5^2$ y de $5^{x_2-1} = t_2 = 1 = 5^0$, y vienen dadas, respectivamente, por $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$.

- **Función logaritmo generalizada:** La función logaritmo de un número real positivo x, en una base dada $b > 0$ y tal que $b \neq 1$, es el exponente y al cual se debe elevar la base b para obtener el argumento x. Es decir,

$$f(x) = \log_b x = y \quad \Rightarrow \quad b^y = x, \quad b > 0,\ x > 0.$$

Es importante señalar que siempre se puede pasar de una representación logarítmica a otra exponencial. Veremos ejemplos que ilustrarán este hecho.

Ejemplo: Consideremos la función logaritmo dada por $y(x) = \log_2 x$, donde la base es $b = 2$. Si representamos esta función para valores de la variable independiente x mayores que 0, aunque cercanos, hasta 10, obtendremos la figura que se muestra a la derecha. Podemos observar que la gráfica es continua para $x > 0$, crece de manera monótona, es negativa para $0 < x < 1$ y positiva para $x > 1$. Cerca del origen, $x = 0$, la función $y(x) = \log_2 x$ tiende a $-\infty$. En $x = 1$, la función $y(1) = \log_2 1 = 0$. Para valores de x negativos la función no está definida (y por tanto no se puede representar).



Propiedades de las funciones logarítmicas generalizadas en base $b > 0$:

- Si $0 < x < 1$ entonces la función logaritmo $\log_b x < 0$. Si $x > 1$ entonces $\log_b x > 0$.
- No existe el logaritmo de un número negativo, ni de cero.
- $\log_b 1 = 0$, el logaritmo de la unidad es siempre cero y $\log_b b = 1$, el logaritmo en base b de b es la unidad.
- Logaritmo de un producto: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$, siempre que $x, y > 0$
- Logaritmo de un cociente: $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$, siempre que $x, y > 0$.
- Logaritmo de una función exponencial: $\log_b (b^x) = x$, siempre que $x > 0$.
- Logaritmo de una potencia: $\log_b (x^a) = a \log_b x$, siempre que $x > 0$.
- Cambio de base: $\log_b x = \log_c x / \log_c b$, siendo b y c las bases antigua y nueva, con $x > 0$.

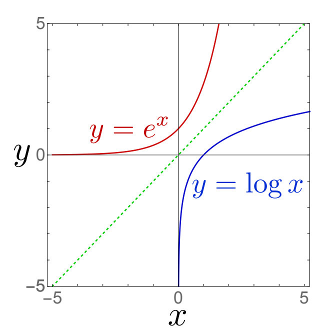
Los logaritmos son muy útiles para transformar productos en sumas y viceversa. Sean $a_k > 0$, con $k = 1, 2, \ldots, n$ y n entero positivo. Entonces,

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \quad \Longleftrightarrow \quad \log_b (P) = \log_b a_1 + \log_b a_2 + \cdots + \log_b a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_b a_k.$$

- **Las funciones exponencial y logaritmo naturales:** Cuando la base b es igual al número $e = 2.7182818\ldots$, se tienen las funciones exponencial y logaritmo naturales, también conocidos como neperianos. Se denotan, respectivamente (prestar atención a las calculadoras), por

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = \ln x = \log_e x = \log x. \tag{3.1}$$

Gráfica de las funciones exponencial y logaritmo: La función logaritmo en base $b = e$ es la función inversa de la función exponencial en esa base. Esto significa que cuando representamos las gráficas de las funciones $y(x) = e^x$ e $y(x) = \log x$, ambas son simétricas respecto a la bisectriz que cruza el primer y tercer cuadrante, tal y como ilustra la figura adjunta de la derecha. Este hecho también ocurre con cualquier otro par de funciones logaritmo y exponencial que tengan la misma base $b > 0$.



Ecuaciones logarítmicas: Una ecuación logarítmica es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el argumento del logaritmo. Para resolver una ecuación logarítmica hay que tener en cuenta que si $\log_b(x_1) = \log_b(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ siempre que $x_1, x_2 > 0$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $2\log(2x) = \log(x^2+75)$.
Como $2\log(2x) = \log(4x^2)$, la ecuación se convierte en

$$\log(4x^2) = \log(x^2+75) \quad\Longrightarrow\quad 4x^2 = x^2+75 \quad\Longrightarrow\quad 3x^2 = 75 \quad\Longrightarrow\quad x = \pm 5.$$

Ahora bien, debe prestarse atención al hecho de que en la ecuación inicial $2\log(2x) = \log(x^2+75)$, el término $2\log(2x)$ está definido solo para $x > 0$. Por tanto, de las dos posibles soluciones $x = \pm 5$, únicamente $x = 5$ es la admisible.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\frac{\log_2 x}{\log_4(2x)} = \frac{\log_8(4x)}{\log_{16}(8x)}.$$

De manera análoga a como hicimos antes en el ejemplo de la ecuación exponencial, es conveniente introducir un cambio de variable. En este caso definimos $t = \log_2 x$ y transformamos los restantes términos a la misma base $b = 2$ mediante la propiedad $\log_c x = \log_b x / \log_b c$, siendo $b = 2$ y c cualquiera de las otras tres bases (4, 8 y 16).

$$\log_4(2x) = \frac{1}{2}\log_2(2x) = \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 x) = \frac{1}{2}(1+\log_2 x) = \frac{1}{2}(1+t).$$

Procediendo de modo similar, encontramos que

$$\log_8(4x) = \frac{1}{3}(2+t), \quad \log_{16}(8x) = \frac{1}{4}(3+t).$$

De lo anterior resulta entonces la ecuación $\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)} \Rightarrow t^2+3t-4 = 0$, cuyas soluciones son $t_1 = 1$ y $t_2 = -4$. Deshaciendo el cambio hallamos que $\log_2 x_1 = t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ y $\log_2 x_2 = t_2 = -4 \Rightarrow x_2 = 1/16$.

Al resolver ecuaciones logarítmicas podemos encontrarnos con soluciones extrañas que no sean admisibles. Así pues, debemos comprobar siempre cuáles, de entre todas las soluciones que hayamos obtenido, satisfacen la ecuación o ecuaciones de partida. Insistimos en el hecho de que para calcular logaritmos los argumentos han de ser números positivos.

3.2 Problemas Resueltos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$a)\ 2^{1-x^2} = \frac{1}{8}. \qquad b)\ 4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0. \qquad c)\ 2^{2x}2 = 3^x 3^5. \qquad d)\ e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0.$$

Soluciones: *a)* Para resolver la ecuación exponencial $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ escribimos primero $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. Por tanto, $2^{1-x^2} = 2^{-3}$. Ahora las bases a ambos lados de la ecuación son las mismas. Podemos igualar los exponentes $1-x^2 = -3$. De donde se sigue que $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$. Comprobamos fácilmente que ambas soluciones satisfacen la ecuación de partida.

b) En la ecuación exponencial $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$, tal y como hicimos en el caso anterior, igualamos primero las bases. Observemos que $4^{\sqrt{x+1}} = 2^{2\sqrt{x+1}}$. La ecuación se convierte en

$2^{2\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$, que podemos escribir por conveniencia así $2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2}$. Igualamos los exponentes, $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}+2$. Simplificando, tenemos $\sqrt{x+1} = 2$. Elevando al cuadrado a ambos lados y despejando la incógnita x obtenemos que la solución es $x = 3$.

c) Comenzamos escribiendo la ecuación exponencial $2^{2x}2 = 3^x3^5$ en la forma equivalente $2^{2x+1} = 3^{x+5}$. Observemos que las bases no son las mismas y no podemos igualarlas, tal y como hicimos en los casos previos. Tomamos logaritmos en base natural a ambos lados, es decir

$$\log\left(2^{2x+1}\right) = \log\left(3^{x+5}\right) \quad \Rightarrow \quad (2x+1)\log 2 = (x+5)\log 3.$$

Agrupamos y obtenemos que $(2\log 2 - \log 3)x = 5\log 3 - \log 2$. Despejamos la incógnita x y hallamos finalmente que

$$x = \frac{5\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3}.$$

d) La ecuación exponencial $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$ se distingue de los casos anteriores en que ahora tenemos más términos (tres frente a los dos que aparecían previamente). En esta situación es muy aconsejable realizar un cambio de variable. Para ello, definimos la nueva variable $t = e^{-x}$. Al hacerlo, la ecuación de partida se transforma en una ecuación polinómica

$$\frac{1}{t} - 5t + 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

De hecho, es una ecuación bicuadrada que ya sabemos cómo resolver (basta tratarla como una ecuación de segundo grado en la incógnita t^2). Las cuatro raíces de esa ecuación son

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = \frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{1}{2}.$$

A continuación, debemos determinar cuáles de esas cuatro raíces proporcionan soluciones correctas de la ecuación de partida. Como $t = e^{-x}$, hemos de hallar los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 analizando las exponenciales

$$t_1 = e^{-x_1}, \quad t_2 = e^{-x_2}, \quad t_3 = e^{-x_3}, \quad t_4 = e^{-x_4}.$$

Es decir,

$$e^{-x_1} = 1, \quad e^{-x_2} = -1, \quad e^{-x_3} = \frac{1}{2}, \quad e^{-x_4} = -\frac{1}{2}.$$

Como la función exponencial nunca es negativa, está claro que no existen números reales x_2 ni x_4 que puedan satisfacer las exponenciales $e^{-x_2} = -1$ y $e^{-x_4} = -\frac{1}{2}$, por lo que quedan descartadas. Con respecto a las otras dos raíces, de $e^{-x_1} = 1$ obtenemos que $x_1 = 0$, y de $e^{-x_3} = \frac{1}{2}$ podemos tomar logaritmos naturales a ambos lados, de donde se sigue que

$$\log\left(e^{-x_3}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -x_3\log e = \log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_3 = \log 2.$$

En los pasos segundo y tercero hemos utilizado que $\log e = 1$ y que $\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$. Concluimos pues que las únicas soluciones de la ecuación de partida son dos: $x_1 = 0$ y $x_3 = \log 2$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log x - 2\log(2x-3) = 0$. *b)* $\log x = \dfrac{4-\log\left(x^3\right)}{\log x}$. *c)* $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3)$.

Soluciones: *a)* Agrupamos los dos términos de la ecuación de partida y simplificamos

$$2\log x - 2\log(2x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left[\log x - \log(2x-3)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x - \log(2x-3) = 0.$$

A continuación hacemos uso de la propiedad que relaciona la diferencia entre logarítmos y el cociente de sus argumentos

$$\log x - \log(2x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{x}{2x-3}\right) = 0.$$

La última ecuación indica que el argumento del logaritmo debe ser igual a uno. Por tanto,

$$\log\left(\frac{x}{2x-3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2x-3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2x-3 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Es fácil comprobar que la solución que hemos obtenido, $x = 3$, satisface la ecuación inicial y es por consiguiente correcta.

b) El término $\log\left(x^3\right)$ en el numerador parece complicar la ecuación. Sin embargo, haciendo uso de la propiedad $\log\left(x^3\right) = 3\log x$, la ecuación dada se convierte en $\log x = \frac{4-3\log x}{\log x}$. Observamos que ahora aparecen términos que involucran únicamente a $\log x$. Es conveniente realizar un cambio de variable. Para ello, definimos la nueva variable $t = \log x$. Al hacerlo, la ecuación de partida se transforma en la siguiente ecuación

$$t = \frac{4-3t}{t} \quad \Rightarrow \quad t^2 + 3t - 4 = 0.$$

La ecuación de segundo grado resultante tiene dos raíces $t_1 = 1$ y $t_2 = -4$. Deshaciendo el cambio de variable, es decir, poniendo $x = e^t$, obtenemos $x_1 = e^1 = e$ y $x_2 = e^{-4}$. Comprobamos que ambas soluciones satisfacen la ecuación logarítmica de partida y, por tanto, son correctas.

c) Agrupamos la ecuación de partida del siguiente modo

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x+3) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x+1}{x(x+3)}\right) = \ln 2.$$

La última ecuación indica que el argumento del logaritmo debe ser igual a dos. Por tanto,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x(x+3)}\right) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x(x+3)} = 2 \quad \Rightarrow \quad x+1 = 2x(x+3) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 1 = 0.$$

La ecuación de segundo grado resultante tiene dos raíces

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(-5+\sqrt{33}\right) \quad x_2 = \frac{1}{4}\left(-5-\sqrt{33}\right).$$

La primera raíz $x_1 = \frac{1}{4}\left(-5+\sqrt{33}\right)$ es positiva ya que $-5+\sqrt{33} > -5+\sqrt{25} = -5+5 = 0$. La segunda raíz $x_2 = \frac{1}{4}\left(-5-\sqrt{33}\right)$ es negativa. La primera raíz x_1, al ser positiva, es fácil comprobar que satisface la ecuación de partida y que, por tanto, es correcta. La segunda raíz x_2, al ser negativa, no está claro que vaya a ser una solución admisible. No obstante, podemos comprobar que al sustituirla en la ecuación inicial los logaritmos siempre tienen argumentos positivos, por consiguiente, también es correcta.

3. Sea $\alpha = \frac{\log_\alpha q}{\log_\alpha p} > 0$ con $p, q > 0$, $p \neq q$ y $p \neq 1$. Hallar, en términos de α, las soluciones $x, y > 0$ del sistema de ecuaciones:

$$x^y = y^x, \quad p^x = q^y.$$

Solución: Como $p, q, x, y > 0$, podemos tomar logaritmos en base α en el sistema de ecuaciones dado y obtenemos que

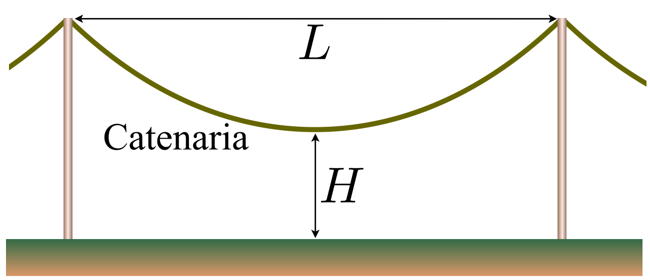
$$y \log_\alpha x = x \log_\alpha y, \quad x \log_\alpha p = y \log_\alpha q, \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha y}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\log_\alpha q}{\log_\alpha p} = \alpha.$$

Por tanto, deducimos que $x = \alpha y$ y que $\dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha y} = \alpha$, la cual es equivalente a $x = y^\alpha$. Así pues, combinando las dos últimas expresiones, llegamos a la ecuación $\alpha y = y^\alpha$, cuya solución no nula es $y = \alpha^{1/(\alpha-1)}$. Usando la ecuación $x = \alpha y$, encontramos que $x = \alpha \alpha^{1/(\alpha-1)} = \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}$.

4. Una catenaria es la curva que describe un cable que cuelga suspendido de sus dos extremos bajo la acción de la gravedad. La altura $h(x)$ a la que se encuentra un punto x de la catenaria con respecto al suelo viene dada por la fórmula:

$$h(x) = \frac{H}{2}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right),$$

donde H es la altura a la que está del suelo la parte inferior del cable (en $x = 0$) y $a > 0$ es una constante que depende del material del que esté hecho el cable. Supongamos que entre dos postes verticales de altura $2H$ cuelga una catenaria (ver figura inferior). Halla una expresión que proporcione la distancia L que separa a ambos postes en términos solo de la constante a.



Solución: El enunciado nos indica que la altura de la catenaria viene dada por $h(x) = \frac{H}{2}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$. La altura mínima de la misma se alcanza en el punto $x = 0$ donde $h(0) = H$, mientras que en los postes más próximos al punto $x = 0$, situados en los puntos $x = \pm L/2$, la altura es $h(\pm L/2) = 2H$. Por la simetría del problema, consideremos sin pérdida de generalidad el poste que está en $x = L/2$. Se cumple entonces que

$$h(L/2) = 2H = \frac{H}{2}\left(e^{aL/2} + e^{-aL/2}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{aL/2} + e^{-aL/2} = 4.$$

Definamos la variable $z = e^{aL/2}$. Entonces, la última ecuación se convierte en $z + z^{-1} = 4$, que es equivalente a la ecuación cuadrática $z^2 - 4z + 1 = 0$. Las dos raíces son $z = 2 \pm \sqrt{3}$. Al desahacer el cambio de variable, tenemos que $e^{aL/2} = 2 \pm \sqrt{3}$. De las dos posibles soluciones para L, la única que es positiva es $L = \frac{2}{a}\log\left(2 + \sqrt{3}\right)$, y esa es la respuesta buscada.

3.3 Problemas Propuestos

1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, sin utilizar la calculadora:

a) Si $0 < x < 1$ entonces $0 < e^x < 1$.
b) Si $0 < \log x < 1$ entonces $1 < x < e$.
c) Si $0 < x < y$ entonces $0 < \log x < \log y$.
d) $\log(xy) = \log x \log y$, siendo $x, y \in \mathbb{R}$.
e) $\log(x^y) = y \log x$, siendo $x, y \in \mathbb{R}$.
f) $\log(\sqrt{x}) = \sqrt{\log x}$, siendo $x, y \in \mathbb{R}$.
g) $e^{xy} = e^x e^y$, siendo $x, y \in \mathbb{R}$
h) Si $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$ entonces $\log_a b \log_b a = 1$.

Respuestas:

a) Falsa. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$, entonces $e^{\frac{1}{2}} > 1^{\frac{1}{2}} = 1$. Para que $0 < e^x < 1$ debe cumplirse que $-\infty < x < 0$.
b) Verdadera.
c) Falsa. Aunque es cierto que si $0 < x < y$ entonces $\log x < \log y$, ya que la función logaritmo es creciente, existen valores $0 < x < y$ para los cuales que tanto $\log x$ como $\log y$ son negativos. Por ejemplo, $x = \frac{1}{4}$ e $y = \frac{1}{2}$.
d) Falsa. Recordemos que el logaritmo de un producto, $\log(xy) = \log x + \log y$, siempre que $x, y > 0$.
e) Falsa.
f) Falsa. Recordemos que $e^{xy} = (e^x)^y$, siendo $x, y \in \mathbb{R}$.
g) Verdadera. Se sigue fácilmente de la propiedad de cambio de base: $\log_b x = \log_c x / \log_c b$, tomando $x = c = a$, junto con el hecho de que $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$.

2. El pH de una disolución constituye una medida de la acidez de un medio y viene representado por la siguiente expresión

$$\text{pH} = -\log_{10}\left(\left[\text{H}^+\right]\right),$$

donde $\left[\text{H}^+\right]$ denota la concentración molar de iones positivos H^+ de hidrógeno y corresponde al cociente del número de tales iones divido por el volumen de la disolución. La concentración molar se mide en moles por litro. Calcula el pH de una disolución en la que hay una concentración molar de iones positivos de hidrógeno $\left[\text{H}^+\right] = 7.74 \times 10^{-4}$ M.

Respuesta: Aplicando la definición de pH, se tiene $\text{pH} = -\log_{10}\left(\left[\text{H}^+\right]\right) = -\log\left(7.74 \times 10^{-4}\right) = -\log(7.74) - \log\left(10^{-4}\right) = 4 - 0.89 = 3.11$, que corresponde a un pH ácido por ser menor que 7.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$. *b*) $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$. *c*) $6^x - 2^x = 32$.

Respuestas: *a)* $x = 1$. *b)* $x = 3$. *c)* $x = 2$.

4. Si $60^a = 3$ y $60^b = 5$, encuentra el valor de $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ sin usar la calculadora.

Respuesta: $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 2$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log x - 2\log(x+1) = 0$. *b*) $\log(x) = \dfrac{2 - \log x}{\log x}$. *c*) $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$.

Respuestas: *a)* No existen soluciones reales. *b)* $x_1 = e$ y $x_2 = e^{-2}$. *c)* $x = 2$.

6. La fórmula barométrica proporciona una forma rápida de estimar el cambio de la presión atmosférica $P(z)$ a una altura z sobre el nivel del mar. Dicha fórmula viene dada por

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}z\right),$$

donde P_0 es la presión atmosférica a nivel del mar, M es la masa molar del aire, g la aceleración de la gravedad, R la constante universal de los gases y T la temperatura estándar. Encuentra una expresión para la altura z sobre el nivel del mar, en términos de las demás constantes, y a la cual la presión atmosférica sea la mitad que P_0.

Respuesta: $z = \dfrac{RT}{Mg}\log 2$.

7. Una población de $B(t)$ bacterias crece siguiendo una ley logística de manera que, en el tiempo t, ésta viene dada por la expresión:

$$B(t) = \frac{\alpha B_0}{\beta B_0 + (\alpha - \beta B_0)\, e^{-\alpha t}},$$

donde B_0 es la población inicial de bacterias (en $t = 0$) y las constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ representan las llamadas tasas de crecimiento y saturación de las bacterias, respectivamente. Determina una fórmula, en términos de B_0, α y β, para el tiempo t_d necesario que debe transcurrir de tal forma que la población de bacterias doble a la que había inicialmente.

Respuesta: El tiempo buscado viene dado por la expresión $t_d = \frac{1}{\alpha}\log\left[\frac{2(\alpha-\beta B_0)}{\alpha-2\beta B_0}\right]$.

8. La fórmula $D = E\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ permite determinar el dinero D acumulado en t años cuando se han invertido E euros a un interés de $r\,\%$ con capitalización n veces al año. ¿Cuánto tiempo será necesario mantener la inversión en el banco para que, si $E = 10000$ euros, se obtengan 10500 euros cuando el interés anual nominal es de $2\,\%$ con capitalización cuatrimestral?

Solución: Tomando logaritmos neperianos en la fórmula $D = E\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$, tendremos que $\log D = \log E + nt\log\left(1+\dfrac{r}{n}\right)$. Por tanto, podremos despejar el tiempo

$$t = \frac{\log D - \log E}{n\log\left(1+\frac{r}{n}\right)} = \frac{\log\frac{D}{E}}{n\log\left(1+\frac{r}{n}\right)}.$$

En nuestro caso, la capitalización es cuatrimestral lo que significa que $n = 3$. Además, $r = 2\,\% = 0.02$, $E = 10000$ euros y $D = 10500$ euros, de donde obtendremos que $t = 2.4476$ años que equivale a 2 años, 5 meses y 11 días.

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

$$a)\ \begin{cases} \frac{2^{2x-3}}{2^{3y+2}} = 2^8 \\ 3x-2y = 17. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^{x-1} = 2^{y-2}+1. \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 5^x 25^y = 5^7 \\ 2^{x-1}2^{y+2} = 64. \end{cases}$$

Respuestas: *a)* $x = 5$, $y = -1$. *b)* $x = 2$, $y = 3$. *c)* $x = 3$, $y = 2$.

10. Calcula el valor de ab si se sabe que a y b satisfacen el sistema de ecuaciones logarítmicas

$$\log_8 a + \log_4 b^2 = 5\,, \quad \log_8 b + \log_4 a^2 = 7\,.$$

Solución: Sumando las dos ecuaciones encontramos que $\log_8(ab) + \log_4(a^2b^2) = 12$. Definiendo $x = ab$, realizando el cambio de base $\log_8 x = \log_4 x/\log_4 8$ y operando llegamos a la ecuación $(\log_4 x/\log_4 8) + \log_4(x^2) = 12$, cuya solución es $x = ab = 512$.

11. Si $x, y > 0$, $\log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3}$ y $xy = 144$, halla el valor de $x + y$.

Respuesta: $x + y = 26\sqrt{3}$.

12. Resuelve la ecuación:

$$2^{1-|x|} - 1 = x^2 + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Respuesta: Solo hay una solución y es $x = 0$.

13. En muchas áreas de la Ingeniería el concepto de periodo de retorno τ, que es el tiempo medio entre dos sucesos improbables con posibles consecuencias catastróficas (por ejemplo terremotos, inundaciones, rotura de diques, fallo de máquinas) se puede calcular en términos de la expresión:

$$\tau = \frac{1}{1 - F(x_c)}\,, \quad \text{donde} \quad F(x_c) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\lambda - x_c}{\delta}\right)\right],$$

siendo $\lambda, \delta > 0$ dos constantes y x_c el llamado valor crítico (o excedencia) para el que se produce la catástrofe. Al diseñar una construcción o una máquina, normalmente lo que se hace es fijar el periodo de retorno τ, que se mide en años, y se determina entonces el valor crítico x_c correspondiente que conduciría a ese τ. Se pide:

a) Encuentra una fórmula general para x_c en términos del periodo de retorno τ y de las constantes $\lambda, \delta > 0$.

b) Para el caso de la construcción de la avenida de un río se quiere que $\tau = 50$ años, $\lambda = 38.0\ \text{m}^3/\text{seg}$ y $\delta = 4.76\ \text{m}^3/\text{seg}$. Calcula el valor crítico x_c correspondiente.

Respuestas: *a)* El periodo de retorno τ podemos expresarlo como

$$\tau = \frac{1}{1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{\lambda - x_c}{\delta}\right)\right]} \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-\exp\left(\frac{\lambda - x_c}{\delta}\right)\right] = 1 - \frac{1}{\tau}\,.$$

Tomando logaritmos dos veces y teniendo en cuenta que las exponenciales de números reales nunca son negativas (lo que sugiere usar valores absolutos), encontramos que

$$x_c = \lambda - \delta \log\left|\log\left|1 - \frac{1}{\tau}\right|\right|\,.$$

b) Reemplazando los valores en la expresión obtenida en el apartado anterior se encuentra que $x_c = 59.51\ \text{m}^3/\text{seg}$.