PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 (2024)
Adaptación del modelo de examen a causa de COVID-19
Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) con seis problemas cada una. Se ha de elegir una propuesta y resolver un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Sólo se pueden utilizar calculadoras tipo II. Calculadoras gráficas o simbólicas no están permitidas.

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Propuesta A

1. La producción (P) en kg. de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (t) del ambiente en dicho invernadero en grados centígrados y viene dada por la expresión $P(t) = 2(t+1)(32-t)$.

a) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18ºC? (0.5 puntos)

b) ¿A qué temperatura se produce la máxima producción? ¿Cuál es esa máxima producción? (2 puntos)

Solución:

a) $P(18) = 2(18+1)(32-18) = 532$ kg. (0.5 puntos)

b) Máximo relativo si $P'(t) = 0$ y $P''(t) < 0 \Rightarrow P'(t) = -4t + 62$ y $P'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{31}{2}$.

$P''(t) = -4 \Rightarrow P''(\frac{31}{2}) = -4 < 0$. El máximo de producción se produce a 15.5ºC y es de $P(15.5) = 544.5$ kg. (2 puntos)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (C - B)$ (1 punto)

b) Despeja y calcula la matriz X en la ecuación $AX + B = C$. (1 punto)

c) ¿Se puede hallar una matriz Y tal que $YA + B = C$? (0.5 puntos)

Solución:

a) $A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1 punto)

b) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (1 punto)

c) $YA + B = C \Rightarrow YA = C - B \Rightarrow Y = (C - B) \cdot A^{-1}$. Como $C - B$ tiene dimensión 2×3 y A^{-1} tiene dimensión 2×3 no es posible hacer el producto, luego no existe Y. (0.5 puntos)

3. En la función $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 6$ se pide:

a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.25 puntos)

b) Averiguar los puntos de inflexión de la función. (0.75 puntos)

c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) de la función. (0.5 puntos)

Solución:

a) Los posibles máximos y mínimos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y $x = 3$. Se evalúan los valores obtenidos en $f''(x) = 4x - 4$ para determinar si los puntos encontrados son máximos o mínimos.

$f''(-1) = -8 < 0 \Rightarrow$ máximo. (0.5 puntos)

$f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow$ mínimo. (0.5 puntos)

Los puntos obtenidos son: (0.25 puntos)

$f(-1) = \frac{28}{3} \Rightarrow P\left(-1, \frac{28}{3}\right)$ máximo relativo.

$f(3) = -12 \Rightarrow P(3, -12)$ mínimo relativo.

b) Los posibles puntos de inflexión cumplen $f''(x) = 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Se evalúa en $f'''(x) = 4 \Rightarrow f'''(1) = 4 \neq 0$ confirmando que es punto de inflexión. (0.5 puntos)

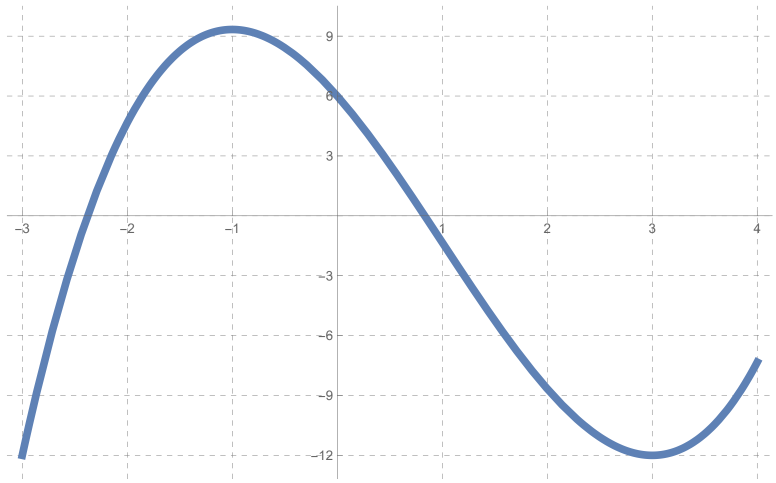
Por tanto, $f(1) = -\frac{4}{3} \Rightarrow P\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ punto de inflexión. (0.25 puntos)

c) El estudio de concavidad viene dado por el signo de la segunda derivada:

$f''(x) = 0$ para $x = 1$.

$f''(x) > 0$ en el intervalo $(1, \infty) \Rightarrow$ es convexa (si se le llama convexa a la forma $\cup$).

$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \Rightarrow$ es cóncava ($\cap$). (0.5 puntos)



4. Los 30 alumnos y alumnas de un grupo de 4° de ESO cursan una de las tres asignaturas optativas disponibles, Artes Escénicas, Danza y Folklore (AEDF), Francés o Música. Si dos alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Música, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Música se hubiesen matriculado en AEDF, entonces AEDF tendría el doble del número de alumnos que Música.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita calcular el número de alumnos matriculado en cada asignatura. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado. (1.5 puntos)

Solución:

a) Llamando $x \equiv$ número de alumnos que cursan AEDF; $y \equiv$ número de alumnos que cursan Francés; $z \equiv$ número de alumnos que cursan Música.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=30 \\ y-2=z+2 \\ 2*(z-2)=x+2 \end{array}\right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada. Todas bien 1 punto)

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (10, 12, 8)$ alumnos. Por tanto, la distribución por optativa es: 10 alumnos en AEDF, 12 alumnos en Francés y 8 alumnos en Música. (1 punto por el desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta)

5. Para 3 puestos de trabajo en los que se pide el grado de Matemáticas se presentan 70 candidatos, de los cuales 45 son mujeres. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres elegidos sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (1 punto)

c) Los tres elegidos sean del mismo sexo. (1 punto)

Solución:

$M =$ Mujer; $H =$ Hombre.

a) $P(M \cap M \cap M) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{45}{70} \cdot \frac{44}{69} \cdot \frac{43}{68} = 0.259$. (0.5 puntos)

b) $P((H \cap H \cap M) \cup (H \cap M \cap H) \cup (M \cap H \cap H) \cup (H \cap H \cap H)) = 3 \cdot \frac{25}{70} \cdot \frac{24}{69} \cdot \frac{45}{68} + 0.042 = 0.247 + 0.042 = 0.289$. (1 punto)

c) $P((M \cap M \cap M) \cup (H \cap H \cap H)) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) + P(H) \cdot P(H) \cdot P(H) = \frac{45}{70} \cdot \frac{44}{69} \cdot \frac{43}{68} + \frac{25}{70} \cdot \frac{24}{69} \cdot \frac{23}{68} = 0.259 + 0.042 = 0.301$. (1 punto)

6. El tiempo que se necesita para resolver un problema de programación lineal sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 36$ minutos^2. Un profesor ha tomado una muestra de 10 estudiantes y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 14, 16, 8, 9, 7, 13, 15, 8, 17 y 10 minutos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo necesario para resolver este tipo de problemas con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.75 puntos)

c) El profesor afirma que el tiempo que tardan resolver el problema es de 13 minutos. ¿Se puede aceptar la afirmación del profesor con un nivel de confianza del $99\,\%$? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{14+16+8+9+7+13+15+8+17+10}{10} = 11.7$ minutos.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 36$ minutos^2 $\Rightarrow \sigma = 6$ minutos, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(11.7 - 2.17 \frac{6}{\sqrt{10}},\ 11.7 + 2.17 \frac{6}{\sqrt{10}}\right) = (7.583,\ 15.817)$ (0.5 puntos)

b) Al aumentar el tamaño de muestra, disminuye el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto disminuirá la amplitud del intervalo. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

c) El valor de 13 minutos está en el intervalo calculado al $97\,\%$, como al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 13 minutos también estará en el IC al $99\,\%$ y por lo tanto se puede aceptar la afirmación del profesor. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

Propuesta B

1. Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes en cada momento del día puede representarse, en función de la hora, como: $N(t) = -t^2 + 36t + 260$ con $10 \leq t \leq 22$.

a) ¿Cuántos clientes hay en los almacenes a las 12 de la mañana? (0.5 puntos)

b) ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? ¿Cuál es el máximo número de clientes que se registran? (2 puntos)

Solución:

a) $N(12) = -12^2 + 36 * 12 + 260 = 548$ clientes. (0.5 puntos)

b) Máximo relativo si $N'(t) = 0$ y $N''(t) < 0 \Rightarrow N'(t) = -2t + 36$ y $N'(t) = 0 \Rightarrow t = 18$.

$N''(t) = -2 \Rightarrow N''(18) = -2 < 0$. El máximo de afluencia de clientes se produce a las 18h y es de $N(18) = 584$ clientes. (2 puntos)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$. (1.25 puntos)

b) Despeja y calcula la matriz X tal que $XC = AB$. (1.25 puntos)

Solución:

a) $C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (1.25 puntos)

b) $XC = AB \Rightarrow X = (AB) \cdot C^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. (1.25 puntos)

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ ax + b & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & si\ x > 3 \end{cases}$

a) Encuentra el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en $x = 0$ y $x = 3$. (1.5 puntos)

b) Representa gráficamente la función para $a = -1$ y $b = 1$. (1 punto)

a) La función es continua en un punto $x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + 1 = 1$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (ax + b) = b = f(0)$.

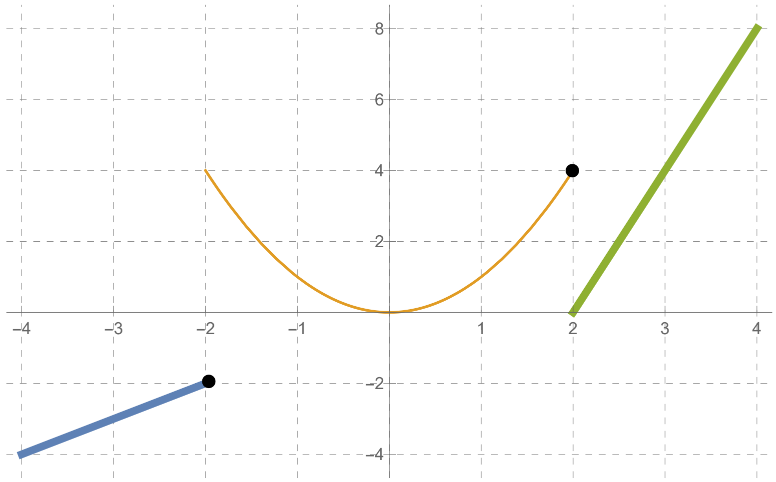
Si $b = 1$ la función es continua en $x = 0$. (0.75 puntos)

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} ax + b = 3a + b = f(3)$.

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (x - 5) = -2$.

Tomando $b = 1$, si $3a + b = -2 \Rightarrow a = -1$ la función es continua en $x = 3$. (0.75 puntos)

b) (1 punto)



4. Una empresa fabrica smartwatchs y tablets. Los smartwatchs requieren 2 horas de trabajo en la sección de ensamblaje y 2 horas en la sección de acabado, mientras que las tablets requieren 3 horas de trabajo en la sección de ensamblaje y 1 hora en la sección de acabado. La empresa tiene 120 horas de trabajo disponibles en la sección de ensamblaje y 100 horas de trabajo disponibles en la sección de acabado y el beneficio por smartwatch es de 40 euros y por tablet es de 45 euros.

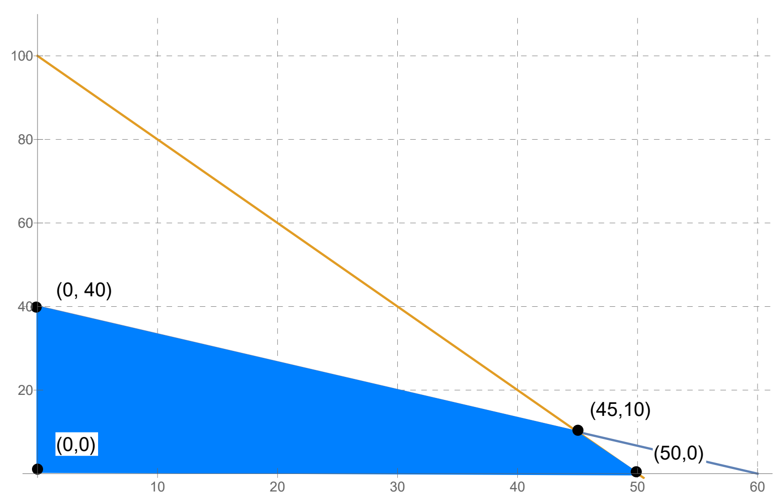
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (2 puntos)

b) Determina el número de smartwatchs y tablets que deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.5 puntos)

Solución:

a) $x \equiv$ número de smartwatchs; $y \equiv$ número de tablets. La función objetivo es $Z(x, y) = 40x + 45y$. (0.5 puntos)

b) Las restricciones del problema son $\begin{cases} 2x + 3y \leq 120 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



(0.75 puntos por restricciones y 0.75 puntos por representar la región factible)

c) Los vertices de la región factible son: $A = (0, 40)$, $B = (50, 0)$, $C = (45, 10)$ y $D = (0, 0)$. (0.25 puntos por los vértices). $Z(A) = 1800$; $Z(B) = 2000$; $Z(C) = 2250$ y $Z(D) = 0$. Luego la solución para maximizar el beneficio es fabricar 45 smartwatchs y 10 tablets. (0.25 puntos por respuesta correcta)

5. En la Facultad de Medicina de Ciudad Real, el $65\,\%$ de los estudiantes son mujeres y de estas el $60\,\%$ ha nacido en Castilla-La Mancha. Sin embargo, solo el $40\,\%$ de los hombres ha nacido en Castilla-La Mancha.

a) Elegido al azar un estudiante de entre todos los estudiantes, hombres y mujeres, que hay en la Facultad, ¿cuál es la probabilidad de que haya nacido fuera de Castilla-La Mancha? (1.25 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante ha nacido en Castilla-La Mancha, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

Solución:

$M =$ mujer; $M^c =$ hombre; $C =$ nacido en Castilla-La Mancha; $C^c =$ no nacido en Castilla-La Mancha.

$P(M) = 0.65$; $P(M^c) = 0.35$; $P(C \mid M) = 0.6$; $P(C \mid M^c) = 0.4$.

a) $P(C^c) = P(M) \cdot P(C^c \mid M) + P(H) \cdot P(C^c \mid H) = 0.65 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.6 = 0.47$. (1.25 puntos)

b) $P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M) \cdot P(C|M)}{P(C)} = \frac{0.65 \cdot 0.6}{(1-0.47)} = 0.7358$. (1.25 puntos)

6. En una granja se ha tomado una muestra aleatoria de 49 gallinas y se ha medido la cantidad de pienso que consumen al día proporcionando una media de 134 gramos. Si se sabe que la cantidad de pienso que consume al día una gallina sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 32$ gramos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la cantidad de pienso que consume al día una gallina con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

c) En la granja se afirma que la cantidad media de pienso que consume una gallina al día es de 122 gramos. ¿Se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del $90\,\%$? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 134$ gramos, $\sigma = 32$ gramos, $n = 49$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. (0.25 puntos)

IC $= \left(134 - 1.96 \frac{32}{\sqrt{49}},\ 134 + 1.96 \frac{32}{\sqrt{49}}\right) = (125.04,\ 142.96)$. (0.5 puntos)

b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor fijo, la única opción es disminuir el tamaño de muestra. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

c) El valor de 122 gramos no está en el intervalo calculado al $95\,\%$. Como al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 122 gramos tampoco estará en el IC al $90\,\%$ y por tanto no se puede aceptar la afirmación. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)