Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años Convocatoria de 2023



Materia: MATEMÁTICAS

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos. Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

A1. Sean las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$
 y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el rango de A.
- b) [1,25 puntos] Despeja X de la ecuación $B \cdot X + A = I$ y calcula X, siendo I la matriz identidad.

Solución:

a) Como |A| = 0 el rango de A tiene que ser menor que 3. Si tomamos la submatriz de las dos primeras filas y columnas, vemos que su determinante es no nulo. Por tanto, el rango de A es 2.

<u>Criterios de corrección:</u>

- Dar la solución final 0,25, justificar el valor del rango 0,75, realizar las operaciones razonadamente 0,25.
- b) Despejamos X de la siguiente manera: $B \cdot X + A = I$; $B \cdot X = I A$; $X = B^{-1}(I A)$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -5 \\ -1 & -10 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{19}{2} & -\frac{25}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{23}{2} & \frac{35}{2} \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, despejar correctamente 0,5, calcular I-A 0,25, realizar las operaciones razonadamente 0,25. Si está mal la inversa de B, se considera si el resto de operaciones son correctas, aunque la solución final no sea correcta.
- **A2**. a) [1,25 puntos] Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}.$$

b) [1,25 puntos] Resuélvelo, si es posible, explicando el método utilizado.

Solución:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
; $AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Rq(A) = Rq(AM) = 3 = número de incógnitas, es un sistema compatible determinado.

Criterios de corrección:

- Cálculo del rango sin justificar 0,25, justificación 0,25.
- Decir que es un sistema compatible determinado 0,25, justificado 0,5. Si se equivoca en el rango no tenerlo en cuenta y valorar el resto.
- b) Solución del sistema: x = 1, y = 0, z = 1.

Criterios de corrección:

- Decir el método de resolución 0,25, realizar los cálculos justificados 0,75.
- Dar la solución final 0,25.

Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (2, a, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$.

A3. a) [1,25 puntos] Calcula el valor de a para que \overrightarrow{u} y \overrightarrow{v} sean perpendiculares.

b) [1,25 puntos] Para a=1, halla la ecuación del plano π que tiene como vectores directores \overrightarrow{u} y \overrightarrow{v} y pasa por el punto (3,-2,-1).

Solución:

a) Para que los vectores sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = a - 2 = 0$. Por tanto, a = 2.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular bien el producto escalar 0,5, justificar los cálculos 0,5.
- b) En este caso, $\vec{u} = (2, 1, 1)$. La ecuación del plano es:

$$(x,y,z) = (3,-2,-1) + \lambda(2,1,1) + \gamma(-1,1,0) = (3+2\lambda-\gamma,-2+\lambda+\gamma,-1+\lambda); \ \lambda,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Utilizando la ecuación implicita:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - y + 3z + 4 = 0.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, justificar los cálculos 0,5, realizar los cálculos correctamente, 0,5.
- A4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{si} \quad x \le 1\\ \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- a) [1,25 puntos] Estudia la continuidad de la función indicando de qué tipo son sus discontinuidades, si las tuyiera.
- b) [1,25 puntos] Halla la recta tangente a la gráfica de la función en x=-2.

Solución:

- a) La función es continua en $(-\infty, 1)$ por ser un polinomio y en $(1, +\infty)$ por ser un cociente de polinomios donde no se anula el denomimador. Veamos qué pasa en x = 1:

 - $\blacksquare \lim_{x \to 1^+} = \frac{1^2 + 1 2}{1 + 2} = 0;$
 - f(1) = -3.

Por tanto, la función no es continua en x=1 y hay una discontinuidad de salto finito.

Criterios de corrección:

- Identificar los intervalos donde la función es continua 0,25, identificar correctamente el punto para estudiar la continuidad y determinar la discontinuidad 0,5, justificarlo razonadamente 0,5.
- b) En x = -2, como f'(x) = 2x 5 cuando x < 1, f'(-2) = -4 5 = -9. Además, $f(-2) = (-2)^2 5 * (-2) + 1 = 15$.

La ecuación de la recta tangente a f(x) en x = -2 es $y = 15 - 9 \cdot (x + 2)$.

Criterios de corrección:

- Calcular f'(x) 0,25, dar la ecuación de la recta tangente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,25, plantear razonadamente todos los pasos 0,5.
- A5. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) [1,25 puntos]
$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx$$
. b) [1,25 puntos] $\int_1^3 (x + 3)e^{2x} dx$.

Solución:

a) Integramos teniendo en cuenta que $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$:

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{\log(x+1)}{4} + \frac{3\log(x-3)}{4} + C$$

Criterios de corrección:

■ Dar la solución final 0,25, identificar el método de integración 0,25, aplicarlo correctamente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,5.

b) Integramos utilizando integración por partes con u = x + 3 y $dv = e^{2x}$:

$$\int_{1}^{3} (x+3)e^{2x}dx = \left[\frac{(2x+5)e^{2x}}{4}\right]_{1}^{3} = \frac{11e^{6}}{4} - \frac{7e^{2}}{4}.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, identificar la integración por partes y sus elementos 0,5, realizar las operaciones correctamente 0,5.
- A6. a) Una marca europea de coches tiene tres fábricas A, B y C. La fábrica A produce el 45 % de los coches, la B el 30 % y la C el 25 %. De la fábrica A se exporta a América el 15 % de la producción, de la B el 20 % y de la C el 10 %. Los coches una vez fabricados se almacenan todos juntos. Se selecciona un coche de esa marca al azar del almacén, calcula razonadamente la probabilidad de:
 - a.1) [0,75 puntos] El coche sea destinado a la exportación.
 - a.2) [0,5 puntos] Si el coche elegido es destinado a la exportación, que haya sido fabricado por la fábrica B.
 - b) La producción por día de una empresa aceitera sigue una normal de media 10000 litros de aceite y desviación típica 110. Se selecciona al azar un día. Calcula razonadamente la probabilidad de que:
 - b.1) [0,5 puntos] La producción sea superior a 10100 litros de aceite.
 - b.2) [0,75 puntos] La producción esté entre 9950 y 10050 litros de aceite.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

Solución:

a) a.1) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(Export) = 0.45 \cdot 0.15 + 0.30 \cdot 0.20 + 0.25 \cdot 0.10 = 0.1525.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente el problema 0,25.
- a.2) Utilizaremos el teorema de Bayes:

$$P(B \mid Export) = \frac{P(B \cap Export)}{P(Export)} = \frac{0,30 \cdot 0,20}{0,1525} = 0,3934 = 39,34 \%.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.
- b) Sea X la variable aleatoria de la producción de aceite en un día.
 - b.1) $P(X > 10100) = 1 P(Z \le 0.91) = 1 0.8186 = 0.1814$ (mirando en la tabla).

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,25.
- b.2) $P(9950 \le X \le 10050) = P(Z \le 0.45) P(Z \le -0.45) = P(Z \le 0.45) (1 P(Z \le 0.45)) = 2 \cdot P(Z \le 0.45) 1 = 2 \cdot 0.6736 1 = 0.3472.$

Criterios de corrección:

■ Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.

Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años Convocatoria de 2023



Materia: MATEMÁTICAS

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos. Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

B1. Sean las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$
 y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Comprueba que $|A^{-1}|$ es 1/|A|, donde |A| es el determinante de A y $|A^{-1}|$ el de la inversa de A
- b) [1,25 puntos] Despeja X de la ecuación $A \cdot X + I = B$ y calcula X, siendo I la matriz identidad.

Solución:

a) Tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -8 & \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Además, $|A^{-1}| = -1/3$ y |A| = -3. Por tanto, se comprueba que $|A^{-1}| = -1/3 = 1/|A| = 1/(-3) = -1/3$. Criterios de corrección:

- Calcular A⁻¹ 0,5, calcular los dos determinantes 0,5, justificar los cálculos y razonar la comprobación 0.25.
- b) Despejamos X:

$$A \cdot X + I = B; A \cdot X = B - I; X = A^{-1}(B - I)$$

El cálculo de X sería:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -4 & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -8 & \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & 4 \\ \frac{10}{3} & -\frac{38}{3} & 6 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular B-I 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,25, justificar los cálculos 0,5. Si está mal la inversa de A se consideran el resto de cálculos como si fuera correcta.
- **B2**. a) [1,25 puntos] Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}.$$

b) [1,25 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior, si es posible, e indica el método de resolución utilizado.

Solución:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
; $AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

|A| = 0, entonces el rango de A es menor que 3. En concreto, el rango es 2. El rango de AM es 2 también. Por tanto, es un sistema compatible indeterminado.

Criterios de corrección:

■ Cálculo del rango sin justificar 0,25, justificación 0,25.

- Decir que es un sistema compatible indeterminado 0,25, justificado 0,5.
- b) Solución del sistema: $x = -\frac{3t-16}{7}, y = \frac{5t+6}{7}, z = t, t \in \mathbb{R}.$

Criterios de corrección:

- Decir el método de resolución 0,25, realizar los cálculos justificados 0,5.
- Dar la solución final 0,25, justificado 0,25.
- **B3**. a) [1,5 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{w} = (4, 2, 1)$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$.
 - b) [1 punto] ¿Qué ángulo forman \vec{u} y \vec{w} para los valores obtenidos en el apartado anterior?

Solución:

a) La condición implica:

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 4 - a, 2a - 4) = (-1, 3, -2).$$

Por tanto, a = 1.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular el producto vectorial 0,5, plantear las ecuaciones 0,5, justificar los cálculos 0.25.
- b) Para calcular el ángulo conviene recordar que

$$\operatorname{ángulo}(\vec{u}, \vec{w}) = \arccos(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{w}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|})$$

Del apartado anterior sabemos que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, 1)$. Por tanto, $|\vec{u} \cdot \vec{w}| = |4 + 2 + 1| = 7$, $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$ y $|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

Entonces el ángulo es $\arccos(\frac{7}{\sqrt{3}\sqrt{21}}) = 0.4909$ radianes o 28,1255 grados.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear el ejercicio 0,25, justificar y realizar los cálculos correctamente 0,5.
- **B4**. Dada la función $f(x) = (-x^2 3)/(x + 1)$.
 - a) [1,5 puntos] Estudia los máximos y mínimos locales, si los tiene.
 - b) [1 punto] Calcula su asíntotal vertical.

Solución:

a) La derivada de f(x) es

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Para encontrar los máximos y mínimos locales igualamos la derivada a cero y obtenemos que se anula en x = -3 y x = 1. Podemos estudiar el signo de la derivada en distintos intervalos para determinar los máximos y mínimos locales:

- $(-\infty, -3)$: derivada negativa y la función es decreciente.
- (-3,1): derivada positiva y la función es creciente.
- $(1, +\infty)$: derivada negativa y la función es decreciente.

Por tanto, en x = -3 hay un mínimo local y en x = 1 hay un máximo local. También se podría haber obtenido este resultado estudiando el signo de la segunda derivada.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular la derivada 0,25, determinar los valores de x donde se anula la derivada 0,25, determinar si son máximos o mínimos, 0,25, justificar los cálculos 0,5.
- b) La asíntota vertical va a estar en un punto x_0 tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm \infty$. El denominador se anula para x=1 pero no así el numerador. Comprobamos los límites laterales:

Por tanto, en x = -1 la función tiene una asíntota vertical.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, determinar el valor de la abscisa 0,25, justificar la asíntota 0,25, justificar los cálculos, 0,25.
- **B5**. *a*) [1,25 puntos] Calcula

$$\int \frac{3x}{x^2 - 3x - 4} dx.$$

b) [1,25 puntos] Calcula el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 4$ y $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{2}x - 21$.

Solución:

a) Para la resolución tendremos en cuenta que $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$:

$$\int \frac{3x}{x^2 - 3x - 4} dx = 3\left(\frac{\log(x+1)}{5} + \frac{4\log(x-4)}{5}\right) + C.$$

Criterios de corrección:

- Dar el resultado correcto, 0,25, determinar el método de resolución, 0,5, justificar los cálculos 0,25, hacer los cálculos correctamente 0,25.
- b) Las funciones se cortan cuando x = 2 y x = 5. Por tanto, el área que se pide es

$$\left| \int_{2}^{5} (f(x) - g(x)) dx \right| = |-45/4| = 45/4.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, determinar los puntos de corte 0,25, plantear la integral 0,25, justificar los cálculos 0,25, hacer los cálculos correctamente 0,25.
- **B6**. a) Tenemos un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y dos urnas. La urna A contiene tres bolas rojas y dos negras y la urna B contiene cuatro bolas rojas y cinco bolas negras. Lanzamos el dado y si la cara superior muestra un múltiplo de tres extraemos una bola de la urna A, si la cara superior no es múltiplo de tres extraemos la bola de la urna B. Lanzamos el dado y extraemos una bola:
 - a.1) [0,5 puntos]¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea roja?
 - a.2) [0,75 puntos] Si la bola extraída es roja, ¿qué probabilidad hay que de la hayamos sacado de la urna A?
 - b) En una mesa de un restaurante hay 8 personas sentadas para comer. Si la probabilidad de que una persona pida un menú vegetariano es de 0.20, calcular:
 - b.1) [0,5 puntos] La probabilidad de que pidan menú vegetariano dos personas de la mesa.
 - b.2) [0,75 puntos] La probabilidad de que pidan menú no vegetariano al menos 6 personas de la mesa.

n	k p	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Solución:

a) a.1) La probabilidad de sacar un múltiplo de 3 en el dado es de P(M3) = 2/6, que es la misma que la de sacar una bola de la urna A, P(A). La probabilidad de no sacar un múltiplo de 3 es la misma que la de sacar una bola de la urna B, es decir, $P(\overline{M3}) = P(B) = 4/6$.

Por tanto, la probabilidad de sacar una bola roja es

$$P(R) = P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B) = (2/6) \cdot (3/5) + (4/6) \cdot (4/9) = 6/30 + 16/54 = 67/135 = 0,4963.$$

Criterios de corrección:

■ Dar la solución final 0,25, justificarlo 0,25.

a.2) Utilizaremos el teorema de Bayes:

$$P(A \mid R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)P(R \mid A)}{P(R)} = \frac{(2/6) \cdot (3/5)}{67/135} = 27/67 = 0,4030.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear las probabilidades que hay que calcular 0,5.
- b) Sea X la variable aleatoria que representa el número de persona que piden un menú vegetariano. Se trata de una binomial con n=8 y p=0,20.
 - b.1) P(X = 2) = 0.2936.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente las probabilidades que hay que calcular 0,25.
- b.2) Se pide la probabilidad de que al menos 6 personas pidan el menú no vegetariano. Esto es equivalente a que 2 personas o menos pidan el vegetariano:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.1678 + 0.3355 + 0.2936 = 0.7969.$$

Criterios de corrección:

■ Dar la solución final 0,25, plantear las probabilidades que hay que calcular 0,5.