Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2016)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A ó B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Realiza la siguiente operación: $(A - B) \cdot C^T$ (donde C^T es la matriz transpuesta de C). (0.75 ptos)

b) (0.75 ptos) Explica la razón por la cual las dos matrices siguientes no tienen inversa:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{(0.25 ptos)} \qquad C^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{(0.25 ptos)}$$

$$(A - B) \cdot C^T = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -3 \\ -8 & 0 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{(0.25 ptos)}$$

b)

La matriz M no es cuadrada y por lo tanto no tiene matriz inversa. Por otra parte, la matriz N es singular (la tercera columna es suma de las dos primeras). Por lo tanto tampoco tiene inversa.

0.5 ptos, si tiene bien una de ellas.

0.75 ptos, todo correcto.

2. *Cierto dulce tradicional está compuesto exclusivamente por tres ingredientes: harina de trigo, huevo y miel. El porcentaje de harina es el triple de la suma de los porcentajes de los otros dos ingredientes. Además, la diferencia entre el porcentaje de harina y el de huevo es seis veces el porcentaje de miel.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el porcentaje de cada ingrediente en este dulce. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 ptos.

x = porcentaje de harina ; y = porcentaje de huevo ; z = porcentaje de miel

$$\begin{array}{l} (I)\ \ x + y + z = 100 \\ (II)\ \ x = 3(y + z) \ \rightarrow\ x - 3y - 3z = 0 \\ (III)\ \ x - y = 6z \ \rightarrow\ x - y - 6z = 0 \end{array}$$

b) Por la resolución correcta del sistema planteado 0.5 ptos.

La solución es: x = 75 ; y = 15 ; z = 10

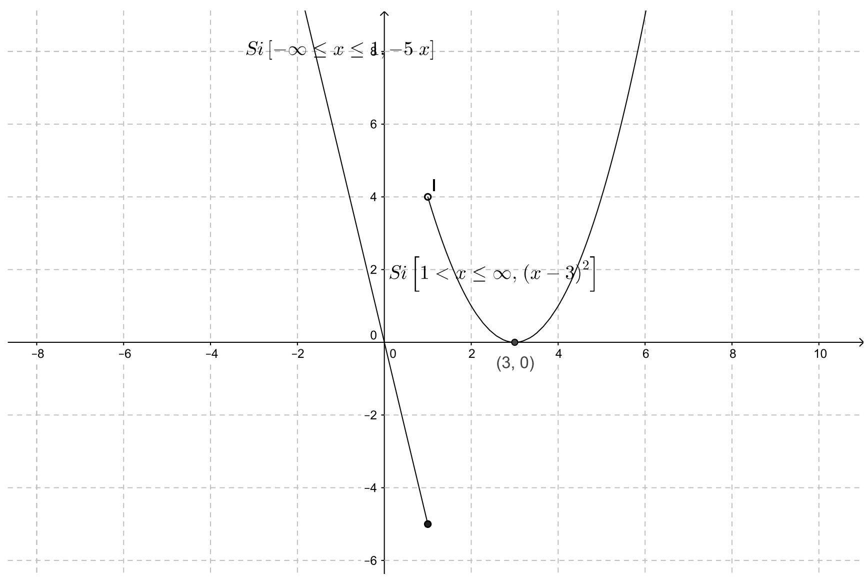
3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} t^2 + t - 5x & si\ x \leq 1 \\ (x-3)^2 + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ *es continua en* x *= 1? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

Solución:



a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones. (0.25 ptos)

Cálculo correcto del valor, t=3 ó t=-3. (0.25 ptos)

b)

Saber condiciones de extremo. (0.25 ptos)

Tiene un mínimo en (3,0) (0.25 ptos)

c)

En (1,3) decreciente y en (3,+∞) creciente

(0.5 ptos)

4. *De la función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *sabemos que tiene un máximo relativo en el punto (1,2) y que tiene un punto de inflexión en el punto (0,0). Con estos datos, halla los valores de los parámetros a, b, c y d. (1.5 ptos)*

Solución:

Si pasa por el punto (0 , 0) entonces d = 0. (0.25 ptos)

f(1) = 2 $\rightarrow$ a + b + c = 2 (I) (0.25 ptos)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \rightarrow \quad f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad (II)$ (0.25 ptos)

$f''(x) = 6ax + 2b \quad \rightarrow \quad f''(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$ (0.25 ptos)

Y si restamos (II) - (I) tenemos que 2 a = - 2 luego a = - 1 y por lo tanto c = 3. (0.5 ptos)

Con todo ello, la función queda: $f(x) = -x^3 + 3x$

5. *En una empresa de Toledo se producen dos modelos de vajillas: A y B. El 10 % de las vajillas son del modelo A y el 90 % del modelo B. La probabilidad de que una vajilla del modelo A sea defectuosa es 0.02 y de que una vajilla del modelo B sea defectuosa es 0.01.*

a) Elegida una vajilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? (0.75 ptos)

b) Se escoge al azar una vajilla y resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo A? (0.75 ptos)

Solución:

a)

A= Tipo A; B=Tipo B; D=defecto;ND= No defecto P(A)=1/10; P(B)=9/10;

P(D/A)=0.02; P(D/B)=0.01

Plantear probabilidades (0.25 ptos)

P(D)=P(D y A)+ P(D y B)=P(A)*P(D/A)+P(B)*P(D/B)=0.02*0.1+0.01*0.9=0.011 (0.5 ptos)

b) P(A/D)=P(A y D)/P(D)=(P(D/A)*P(A))/(P(D))=(0.02*0.1)/(0.011)=0.1818182. (0.75 ptos)

6. *La longitud de un determinado insecto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=0.52 centímetros. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 2.47 centímetros.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) ¿Es razonable que la media de la longitud del insecto sea μ=2.2, con un nivel de confianza del 95 %? Obtén un valor razonable para la media de la longitud de este insecto μ con ese mismo nivel de confianza. Razona tus respuestas. (1 pto)

Solución:

a)

Del enunciado se deduce: $\bar{x} = 2.47$, $n = 40$ y $\sigma \;=\; 0{,}52$

1- α = 0,95 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96 (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} \;-\; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} \;+\; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC= (2.47 - $1{,}96\frac{0{,}52}{\sqrt{40}}$, $2{,}47 \;+\; 1{,}96\ \frac{0{,}52}{\sqrt{40}}$) =(2.30885, 2.63115) (0.5 ptos)

b)

No, ya que 2.2 $\notin$ (2.30885, 2.63115) (0.5 ptos)

Valdría cualquier valor dentro del intervalo (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. *Un aficionado a la artesanía dedica su tiempo libre a decorar botijos y jarrones. Cada mes decora un máximo de 10 botijos y un máximo de 10 jarrones. Dedica una hora a decorar un botijo y 2 horas a decorar un jarrón. Puede dedicar cada mes un máximo de 24 horas a esta afición. Vende toda su producción mensual, y cobra 6 euros por cada botijo y 18 euros por cada jarrón. Se propone obtener el máximo beneficio mensual posible con las condiciones mencionadas.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)

c) Halla el número de botijos y jarrones que debe decorar cada mes para obtener un beneficio máximo e indica a cuánto asciende ese beneficio máximo. (0.75 ptos)

Solución:

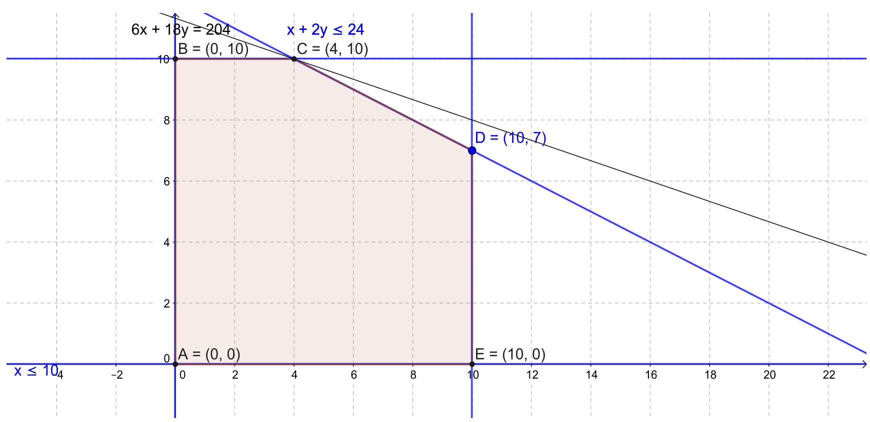
a)

Llamando x a los botijos e y a los jarrones, la función objetivo será: $Z = 6x + 18y$ (0.25 ptos)

b) 0.25 ptos inecuaciones, 0.25 ptos dibujar

Las restricciones del problema:

$$0 \leq x \leq 10 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 10 \quad ; \quad x + 2y \leq 24$$



c) 0.25 ptos, vértices. 0.25 ptos, vértice óptimo. 0.25 ptos, valor

Donde C (4,10) y D (10,7) y tenemos que Z(C) = $6 \cdot 4 + 18 \cdot 10 = 204$ euros

Luego la solución es decorar 4 botijos y 10 jarrones, con lo que se obtienen 204 euros.

2. *Los precios de mis tres frutos secos favoritos son: almendras a 6 euros/kg; avellanas a 16 euros/kg y cacahuetes a 10 euros/kg.*

En el supermercado he tomado algunos kilos de cada uno de estos frutos secos y he llenado una caja de 9 kilos, por la que he pagado 90 euros. En esta caja, la suma de los kilos de avellanas más los de cacahuetes es igual al doble de los kilos de almendras.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilos de cada fruto seco he comprado. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 ptos.

x = kg de almendras ; y = kg de avellanas ; z = kg de cacahuetes

$$\begin{array}{l} (I) \quad x + y + z = 9 \\ (II) \quad 6x + 16y + 10z = 90 \\ (III) \quad y + z = 2x \quad \rightarrow \quad -2x + y + z = 0 \end{array}$$

b) Por la resolución correcta del sistema planteado 0.5 ptos.

La solución es: x = 3 kg ; y = 2 kg ; z = 4 kg

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x-t)^2 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ (x-1)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 ptos)

b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

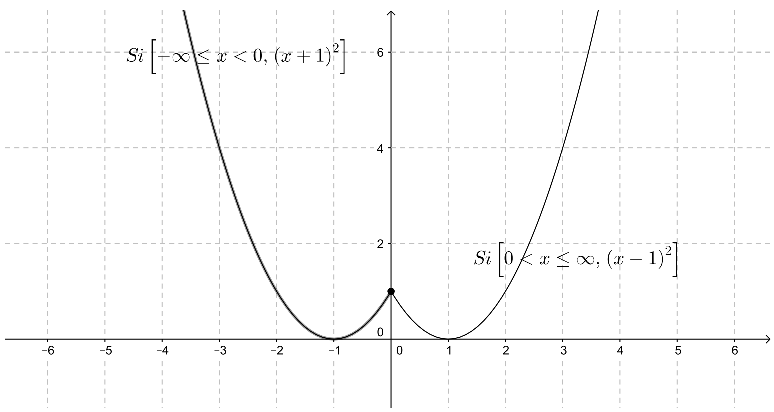
Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese pto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 ptos)

Cálculo correcto del valor, t=1 ó t=-1 (0.25 ptos)

b)



0.5 ptos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 1 pto.

4. *Al comenzar el año ponemos en marcha el estudio de la evolución de la población de un tipo de insectos. Hemos llegado a la conclusión de que esa población se ajusta a la función:* $f(x) = -\frac{1}{30}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + 7$ *donde x está en meses, con* $0 \leq x \leq 12$ *y* $f(x)$ *está en decenas de individuos.*

a) Calcula cuántos insectos tenemos al comenzar el estudio ($x = 0$) y cuántos al terminarlo ($x = 12$). (0.5 ptos)

b) Determina en qué intervalo la población crece y en cuál decrece. (0.5 ptos)

c) Determina en qué momento la población de insectos es máxima y a cuántos individuos asciende. (0.5 ptos)

Solución:

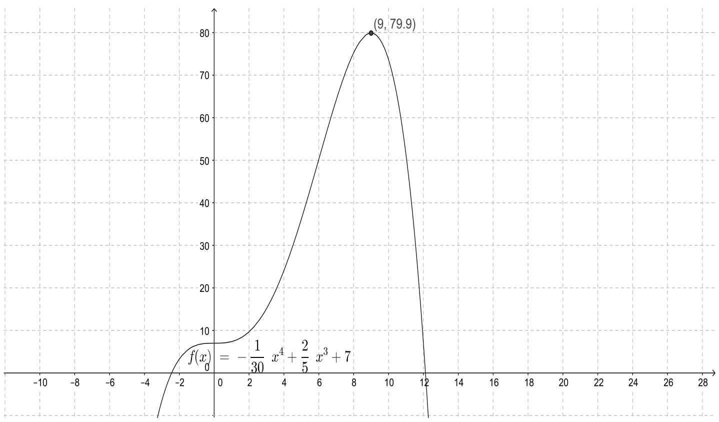
a) f (0) = 7 y también f(12) = 7, hay 70 individuos tanto al comenzar como al acabar el año. 0.25 ptos por cada valor.

b) $f'(x) = -\frac{4}{30}x^3 + \frac{6}{5}x^2 = \frac{2x^2}{15}(-x+9) \rightarrow$ *la derivada es positiva en* $0 \leq x \leq 9$ *y negativa en* $9 \leq x \leq 12 \rightarrow$ la función *es creciente en* $0 \leq x \leq 9$ *y decreciente en* $9 \leq x \leq 12$

0.5 ptos por los intervalos

c) $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ *o bien* $x = 9$
$f''(x) = -\frac{12}{30}x^2 + \frac{12}{5}x \rightarrow f''(0) = 0 \quad ; \quad f''(9) < 0$

por lo tanto en x = 9 un máximo relativo (que a lo largo del año resulta ser absoluto). El valor de f(9) es 79.9 decenas de insectos. 0.25 ptos por el máximo y 0.25 ptos por el valor.



5. *Se sabe que una máquina determinada tiene una probabilidad de tener una avería de 0.1. Tenemos una empresa con 4 máquinas como las anteriores que funcionan de forma independiente.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro tengan una avería? (0.5 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga una avería? (0.5 ptos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las máquinas tenga una avería? (0.5 ptos)

Solución:

A=Avería; P(A)=0.1; NA=No Avería; P(NA)=0.9

a) P(Las cuatro tengan avería)=P(A)*P(A)*P(A)*P(A)=0.1*0.1*0.1*0.1=0.0001. (0.5 ptos)

b) P(Ninguno tenga avería)=P(NA)*P(NA)*P(NA)*P(NA)=0.9^4=0.6561. (0.5 ptos)

c) P(Al menos 1)=1-P(Ninguna tenga avería)=1-0.6561=0.3439. (0.5 ptos)

6. *Se sabe que las puntuaciones de los alumnos en la PAEG siguen una distribución normal de desviación típica σ=1. Los siguientes datos representan las puntuaciones de 15 alumnos elegidos al azar: 7.8, 6.8, 6.7, 6.2, 7.4, 8.1, 5.9, 6.9, 7.5, 8.3, 7.5, 7.1, 6.1, 7.0 y 7.5.*

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional de la puntuación en la PAEG con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) ¿Sería razonable pensar que esta muestra proviene de una población normal con media μ= 6 con un nivel de confianza del 97 %? ¿Y con un nivel de significación igual a 0.08? Razona tus respuestas. (1 pto)

Solución:

Del enunciado se deduce: $\bar{x}$ =7.12, $n = 15$ y $\sigma = 1$. $1 - \alpha = 0.97$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =2.17 (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC= (7.12 - 2.17$\frac{1}{\sqrt{15}}$, 7.12 + 2.17 $\frac{1}{\sqrt{15}}$) = (6.559708, 7.680292) (0.5 ptos)

b) No ya que 6$\notin$ (6.559708, 7.680292) (0.5 ptos)

Con un nivel de confianza del 92 % disminuiría más la amplitud del intervalo luego tampoco estaría dentro del intervalo, se rechazaría la afirmación. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857